5. PREKIDAČKA ALGEBRA

U prethodnom poglavlju je pokazano da se svi podaci u računaru predstavljaju pomoću samo 2 vrednosti: 0 i 1. To znači da se sva obrada podataka u računaru svodi na izvođenje određenih operacija nad skupom B={0,1}. Kako je u matematici poznato da skup podataka sa operacijama koje su u njemu definisane čini neku algebarsku strukturu, algebarska struktura koja predstavlja matematičku osnovu celokupne obrade podataka u računaru je
prekidačka algebra.
Za formalno definisanje prekidačke algebre potrebno je uvesti najpre pojam Bulove algebre.

5.1 Bulova algebra

Bulova algebra je dobila ime po svom tvorcu Džordžu Bulu (*George Boole*), engleskom matematičaru iz 19. veka. Formalna definicija Bulove algebre glasi:

Definicija 5. 1: Neka je u skupu $B = \{a,b,c,\dots\}$ definisana unarna operacija ¯ i binarne operacije + i · . Algebarska struktura (B, ¯, +, ·) predstavlja Bulovu algebru ukoliko su operacije ¯, + i · zatvorene u skupu B i zadovoljavaju aksiome Bulove algebre. Operacija je zatvorena u nekom skupu ukoliko za svaki skup operanada koji pripada tom skupu, rezultat operacije, takođe, pripada tom skupu. U konkretnom slučaju to znači:
$(\forall a)\ (a \in B)\ a \in B\ (\forall a)\ (\forall b)\ (a \in B, b \in B)\ a + b \in B\ (\forall a)\ (\forall b)\ (a \in B, b \in B)\ a \cdot b \in B$
Sve aksiome Bulove algebre se definišu kao jednakosti Bulovih izraza. Zato uvodimo i pojam Bulovog izraza:

Definicija 5. 2: Bulov izraz se formira korišćenjem sledećih pravila:

1. Bulovi izrazi su konstante (0,1) i promenljive (a,b,c,x,y,z,...).
2. Ukoliko su E_1 i E_2 Bulovi izrazi, tada su i $E_1 + E_2$, $E_1 \cdot E_2$, $\overline{E_1}$ i (E_1) takođe Bulovi izrazi.
3. Bulov izraz se može kreirati samo primenom pravila 1. i 2. konačan broj puta.

Primer 5.1 Neki primeri Bulovih izraza su: $0,\ x,\ \bar{x},\ x \cdot y,\ x + y,\ x + \overline{xy}\ ,\ x \cdot (\ y + z)\ \dots$

5.1.1 Aksiome Bulove algebre

(1) Operacije + i · su asocijativne, tj:
$(\forall a)\ (\forall b)(\forall c)(a \in B, b \in B, c \in B)\ a + (b + c) = (a + b) + c\ ,\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
(2) Operacije + i · su komutativne, tj:
$(\forall a)\ (\forall b)(a \in B, b \in B)\ a + b = b + a\ ,\ a \cdot b = b \cdot a$
(3) U skupu B postoje neutralni elementi za sabiranje (0) i množenje (1); tj:
$(\forall a)\ (a \in B)\ a + 0 = 0 + a = a\ ,\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
(4) Za svaki element *a* iz skupa B, u skupu B postoji i njegov komplement *a* koji zadovoljava sledeće osobine:
$(\forall a)\ (a \in B)\ (\exists a)\ (a \in B)\ a + a = a + a = 1,\ a \cdot a = a \cdot a = 0$
(5) Operacije + i · su distributivne jedna u odnosu na drugu, tj:
$(\forall a)\ (\forall b)(\forall c)(a \in B, b \in B, c \in B)\ a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c),$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Osim ovih, operacije Bulove algebre zadovoljavaju još neka tvrđenja koja se mogu dokazati na osnovu navedenih aksioma, pa se ta tvrđenja nazivaju teoremama Bulove algebre.

5.1.2 Teoreme Bulove algebre

(1) Zakon involutivnosti (dvostruke negacije):
$(\forall a)\ (a \in B)\ a = a$
(2) Zakon idempotencije:
$(\forall a)\ (a \in B)\ a + a = a\ ,\ a \cdot a = a$
(3) U skupu B postoje nulti elementi za sabiranje (1) i množenje (0); tj:
$(\forall a)\ (a \in B)\ a + 1 = 1 + a = 1,\ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
(4) Zakon sažimanja:

$$(\forall a)\ (\forall b)(a \in B, b \in B)\ a \cdot b + a \cdot b = a\ ,\ (a + b) \cdot (a + b) = a$$

(5) Zakon apsorpcije:

$$(\forall a)\ (\forall b)(a \in B, b \in B)\ a + a \cdot b = a\ ,\ a \cdot (a + b) = a$$

(6) De Morganovi zakoni:

$$(\forall a)\ (\forall b)(a \in B, b \in B)\ a + b = a \cdot b\ ,\ a \cdot b = a + b$$

Da bi se skratio postupak dokazivanja teorema Bulove algebre koristi se princip dualnosti koji je dat u sledećim definicijama:

Definicija 5. 3: Ako se Bulovom izrazu izvrši uzajamna zamena operacija “+” i “·” i konstanti 0 i 1, a simboli promenljivih i simbol negacije ostanu nepromenjeni, dobiće se ***dualni Bulov izraz***.

Definicija 5. 4: *Princip dualnosti* - Istinitostna vrednost dualnih Bulovih izraza je jednaka, tj. ako je neki Bulov izraz istinit, istinit je i njemu dualan izraz. Ukoliko se pažljivo pogledaju aksiome i teoreme Bulove algebre, uočava se da se one, uglavnom, sastoje iz dva dela, dva dualna Bulova izraza. To znači da je pri dokazivanju teorema Bulove algebre uvek dovoljno dokazati da je samo njihov prvi deo istinit, pa na osnovu principa dualnosti možemo tvrditi da je i odgovarajući drugi deo istinit. Inače, kad smo već dokazali istinitiost prvog dela bilo koje teoreme, istinitost drugog dela se može dokazati istovetnim postupkom (korišćenjem dualnih izraza istih aksioma).

5.2 Prekidačka algebra

Definicija 5. 5: Bulova algebra nad skupom od samo dva elementa (B={0,1}) u kojoj su operacije +, ·, i ¯ definisane tablicama prikazanim u tabelama 5.1, 5.2 i 5.3, respektivno, predstavlja prekidačku algebru.

Tabela 5. 1. Definicija operatora + (logočko ILI)

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabela 5. 2. Definicija operatora · (logičko I)

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela 5. 3. Definicija operatora ¯(logičko NOT ili NE)

-	
0	1
1	0

6. PREKIDAČKE FUNKCIJE

Rad svakog digitalnog uređaja, pa samim tim i svakog dela računarskog sistema, se može opisati pomoću sistema prekidačkih funkcija. U ovom poglavlju ćemo, najpre, dati definiciju prekidačkih funkcija, a zatim ćemo se upoznati sa načinima njihovog predstavljanja.

Definicija 6. 1: Prekidačka funkcija n-nezavisno promenljivih $f(x_1,x_2...x_n)$ predstavlja preslikavanje
$f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ili $f:B^n \to B$, gde B uzima vrednosti iz skupa {0,1}

Uređene n-torke ($k1,k2,\ldots,kn$) gde $k1,k2,\ldots,kn$ uzimaju vrednosti iz skupa {0,1} se nazivaju vektorima prostora $\{0,1\}^n$, ili ulaznim vektorima funkcije f. Ulazni vektori se kraće zapisuju kao $k1k2\ldots kn$.

S obzirom da svaka ulazna promenljiva prekidačke funkcije ima dve moguće vrednosti, ukupan broj ulaznih vektora prekidačke funkcije *n*-promenljivih je 2^n.

Primer 6.2 Ulazni vektori prekidačke funkcije 3 promenljive (x_1, x_2,x_3) su: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 i 111.

Definicija 6. 2: Prekidačka funkcija koja ima definisanu vrednost na svakom ulaznom vektoru se naziva ***potpuno definisana prekidačka funkcija***.

Definicija 6. 3: Prekidačka funkcija koja nema definisanu vrednost za sve ulazne vektore se naziva ***nepotpuno definisana prekidačka funkcija***.

Vrednost funkcije se ne definiše na pojedinim ulaznim vektorima onda kada ne postoji realna situacija u kojoj bi se takav vektor pojavio na ulazu. Na primer, funkcije koje opisuju rad konvertora BCD kodova nisu definisane na svim ulaznim vektorima, jer svi ulazni vektori nisu kodovi dekadnih cifara.

Kada funkcija nije definisana na nekom ulaznom vektoru, njena vrednost na tom vektoru se obeležava zvezdicom. Uvođenje zvezdice u skup mogućih vrednosti funkcije će omogućiti da se napravi optimalna mreža za realizaciju nepotpuno definisane prekidačke funkcije.

6.1 Načini predstavljanja prekidačkih funkcija

Pošto je domen prekidačke funkcije ograničen (rečeno je već da je ukupan broj ulaznih vektora prekidačke funkcije *n*-promenljivih 2^n), zadavanje prekidačke funkcije može da se izvrši tako što se navede vrednost funkcije za svaki mogući ulazni vektor. U takve metode predstavljanja prekidačkih funkcija spadaju:

- predstavljanje prekidačkih funkcija tablicom istinitosti,
- predstavljanje prekidačkih funkcija vektorom istinitosti,
- predstavljanje prekidačkih funkcija skupovima decimalnih indeksa,
- predstavljanje prekidačkih funkcija decimalnim indeksom funkcije.

Druge grupe metoda za predstavljanje prekidačkih funkcija koje će u okviru ovog predavanja biti razmatrane su predstavljanje prekidačkih funkcija pomoću analitičkih formi (tj. korišćenjem Bulovih izraza).

6.1.1 Predstavljanje prekidačkih funkcija tablicom istinitosti

Tablica istinitosti ili kombinaciona tablica prekidačke funkcije *n*-promenljivih je tabela koja ima 2^n vrsta i 2 kolone. U prvoj koloni se navode ulazni vektori funkcije, a u drugoj vrednosti funkcije za odgovarajuće ulazne vektore.

Primer 6.3 U tabeli 6.1 prikazana je tablica istinitosti jedne potpuno definisane prekidačke funkcije 3 promenljive.

Tabela 6.1 Tablica istinitosti potpuno definisane prekidačke funkcije

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Primer 6.4 Tabela 6. 2 sadrži tablicu istinitosti jedne nepotpuno definisane prekidačke funkcije 3 promenljive.

Tabela 6.2 Tablica istinitosti nepotpuno definisane prekidačke funkcije

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	*
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	*
1	1	1	*

6.1.2 Predstavljanje prekidačkih funkcija vektorom istinitosti

Iz tabela 6.1 i 6.2 se vidi da se u tablici istinitosti ulazni vektori uvek ređaju po leksikografskom uređenju od najmanjeg prema najvećem. To znači da je prva kolona za sve funkcije sa istim brojem ulaznih promenljivih u tablici istinitosti uvek ista pa je za jednoznačno određenje funkcije dovoljno pamtiti samo drugu kolonu, tj. samo kolonu sa vrednostima funkcije. Vektor vrednosti funkcije u kojem je zadržan navedeni redosled navođenja članova je poznat kao ***vektor istinitosti*** funkcije.

Primer 6.5 Prekidačka funkcija iz primera 6. 3 se može predstaviti vektorom istinitosti:

$$\mathbf{F} = [01101100]^T .$$

Primer 6.6 Prekidačka funkcija iz primera 6. 4 se može predstaviti vektorom istinitosti:

$$\mathbf{F} = [011*01**]^T .$$

6.2 Bulove operacije

U definiciji Bulove, pa samim tim i prekidačke algebre, navedene su 3 osnovne Bulove operacije $\bar{}$, +, ·. Međutim, pod Bulovim operacijama u širem smislu se podrazumevaju sve prekidačke funkcije jedne i dve promenljive. U tabeli 6.5 su navedene sve prekidačke funkcije jedne promenljive, a u tabeli 6. 6 sve prekidačke funkcije 2 promenljive. U tabeli 6.6 je dodata i kolona sa naslovom ***Bulov izraz*** koja pokazuje kako se navedena operacija može predstaviti pomoću osnovnih Bulovih operacija.

Tabela 6.5 prekidačke funkcije jedne promenljive

x		Oznaka	Naziv funkcije
f_0	00	0	Konstanta 0
f_1	01	x	Promenljiva x
f_2	10	$\bar{x}$	Negacija promenljive x
f_3	11	1	Konstanta 1

Tabela 6.6 prekidačke funkcije dve promenljive

x_1 x_2	0011 0101	Naziv funkcije	Oznaka funkcije	Bulov izraz
f_0	0000	Konstanta 0	0	0
f_1	0001	Konjunkcija, I funkcija	x_1x_2	x_1x_2
f_2	0010	Zabrana po x_2	$x_1 \Delta x2$	$x_1\overline{x_2}$
f_3	0011	Promenljiva x_1	x_1	x_1
f_4	0100	Zabrana po x_1	$x_2 \Delta x_1$	$\overline{x_1}x_2$
f_5	0101	Promenljiva x_2	x_2	x_2
f_6	0110	Suma po modulu 2 (isključivo ILI)	$x_1 \oplus x_2$	$\overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}$
f_7	0111	Disjunkcija, ILI funkcija	x_1+x_2	x_1+x_2

f_8	1000	NILI (Pirsova) strelica	$x_1 \downarrow x_2$	$\overline{x_1 + x_2}$
f_9	1001	Ekvivalencija	$x_1 \equiv x_2$	$\overline{x_1}\overline{x_2} + x_1 x_2$
f_{10}	1010	Negacija promenljive x_2	$\overline{x_2}$	$\overline{x_2}$
f_{11}	1011	Obrnuta implikacija (od x_2 ka x_1)		
f_{12}	1100	Negacija promenljive x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$
f_{13}	1101	Implikacija (od x_1 ka x_2)	$x_1 \rightarrow x_2$	$\overline{x_1} + x_2$
f_{14}	1110	NI funkcija (Šeferova crtica)	$x_1 \vert x_2$	$\overline{x_1 x_2}$
f_{15}	1111	Konstanta 1	1	1

Bulove operacije se veoma jednostavno realizuju elektronskim komponentama koje se nazivaju logička kola. Kombinacijom logičkih kola se projektuju prekidačke mreže koje realizuju složenije prekidačke funkcije. To znači da se složenije prekidačke funkcije mogu predstaviti pomoću Bulovih operacija. Skup Bulovih operacija kojima se mogu predstaviti sve prikidačke funkcije predstavlja ***bazis prekidačke algebre***. Skup operacija $\{^{-}, +, \cdot\}$ se naziva ***pripodni bazis prekidačke algebre***. Za neki skup operacija kažemo da je ***minimalni bazis prekidačke algebre*** ukoliko izostavljanjem bilo koje operacije iz tog skupa, skup prestaje da bude bazis.

Tvrđenje: Skup $\{^{-}, +, \cdot\}$ nije minimalni bazis prekidačke algebre jer skupovi $\{^{-}, \cdot\}$ i $\{^{-}, +\}$ jesu bazisi prekidačke algebre i to minimalni bazisi prekidačke algebre.

Dokaz: Da bi se dokazalo da neki skup operacije jeste bazis prekidačke algebre dovoljno je pokazati da se pomoću tih operacija mogu da realizuju sve operacije prirodnog bazisa. Dakle, da bismo pokazali da je skup $\{^{-}, \cdot\}$ bazis prekidačke algetre treba pokazati da se pomoću ovog skupa operacija može da realizuje i operacija +.

$x + y = \overline{\overline{x + y}}$ - *Zakon dvostruke negacije*

Napomena: Za ovu prezentaciju korišćeni su delovi iz navedene literature prilagođeni obimu dokumenta koji šaljemo mejlom na sajt škole.

Literatura:

S. Stojković, N. Stojanović, D. Stojanović: Uvod u računarstvo, Niš, 2014

Ž.Tošić: Osnovi računarske tehnike, Niš, 1994