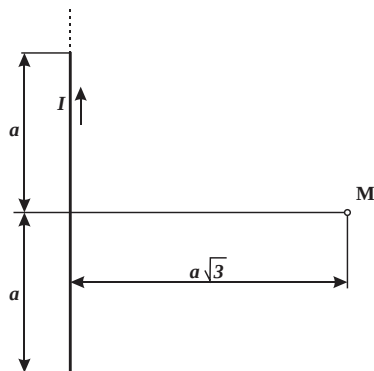
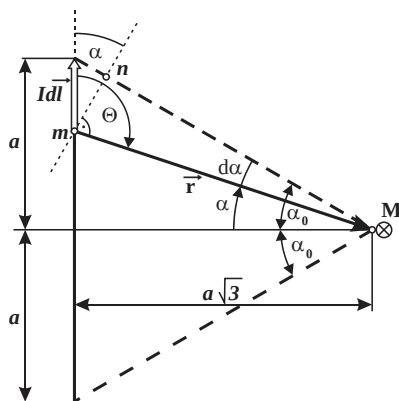


1.1.2. Одредити магнетну индукцију коју у тачки М ствара праволинијски део танког проводника дужине $2a$ са сталном јачином струје I (слика 1.1.2.1.). Средина је ваздух. Бројни подаци: $2a = 3\text{cm}$ и $I = 2,2\text{A}$.



Слика 1.1.2.1.

Решење:



Слика 1.1.2.2.

Користећи изразе из претходног задатка, водећи рачуна о уведеним ознакама, добићемо магнетну индукцију у тачки М (Слика 1.1.2.2.):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin(\vec{dl}, \vec{r})}{r^2}$$

а сам вектор је управан на раван цртежа и има смер означен на слици.

$$dl \sin(\vec{dl}, \vec{r}) = dl \sin \Theta = dl \sin(\pi/2 - \alpha) = dl \cos \alpha.$$

$$dl \cos \alpha = \overline{mn} = r d\alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\alpha}{r}$$

С обзиром на везу

$$\frac{a\sqrt{3}}{r} = \cos \alpha$$

има се

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \alpha d\alpha}{a\sqrt{3}},$$

па је укупна индукција у тачки М

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\cos \alpha d\alpha}{a\sqrt{3}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a\sqrt{3}} (\sin \alpha_0 - \sin(-\alpha_0)) = 0,085 \mu T$$

При одређивању граница интеграла треба обратити пажњу на позитиван смер одмеравања угла α . Угао α се рачуна од нормалног растојања тачке и правца проводника. Референтни смер за α узет је у смеру струје проводника. Овде је

$$\alpha_0 = \arctg \frac{a}{a\sqrt{3}} = \arctg \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\pi}{6}$$

1.1.3. Одредити магнетну индукцију у центру квадратне струјне контуре странице a .

Решење:

Магнетна индукција која потиче од струје у струјној контури квадратног облика (слика 1.1.3.) једнака је збиру магнетних индукција које потичу од струје у појединим страницама квадрата:

$$\vec{B} = \vec{B}_{(1)} + \vec{B}_{(2)} + \vec{B}_{(3)} + \vec{B}_{(4)}$$

Вектор $\vec{B}$ је нормалан на раван цртежа а смер му је одређен правилем десне завојнице (од цртежа ка нама).

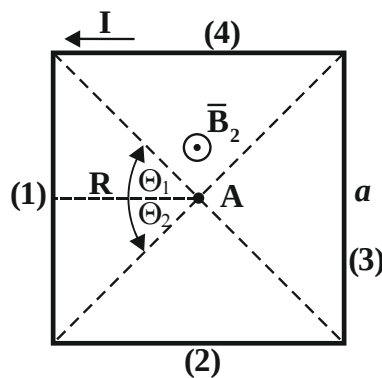
Интензитет вектора магнетне индукције коју ствара струја у једној страници квадрата је:

$$B_{(1)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$R = \frac{a}{2}$$

$$\theta_2 = -\theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \theta_2 = -\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Слика 1.1.3.

$$B_{(1)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} 2 \sin \theta_2 = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{\pi a}$$

Укупна магнетна индукција у тачки А је:

$$B = 4B_{(1)} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}.$$

1.1.4. Одредити вектор магнетне индукције у центру танког кружног кола (слика 1.1.4.) полупречника дужине a , са сталном струјом јачине I . Средина је ваздух.

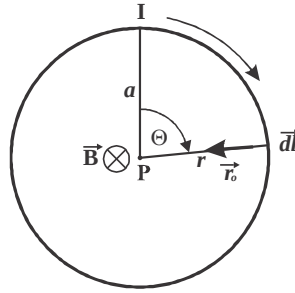
Бројни подаци: $a = 25 \text{ cm}$ и $I = 15 \text{ A}$

Решење:

Интензитет магнетне индукције је:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{a^2}$$

Слика 1.1.4.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin(\vec{dl}, \vec{r}_0)}{a^2}$$

где је (према слици) $dl = a d\theta$ и $\sin(\vec{dl}, \vec{r}_0) = 1$

Интензитет магнетне индукције у центру кружног проводника је:

$$B = \mu_0 \int_0^{2\pi} \frac{I a d\theta}{4\pi a^2} = \frac{\mu_0 I}{2a} = 3,76 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

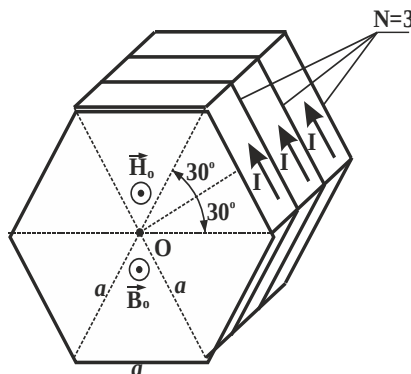
Правац и смер вектора магнетне индукције приказан је на слици.

1.1.9. Једносмерна струја јачине I протиче кроз рам у облику правоуглог шестоугла, странице a који се налази у ваздуху. Рам је изведен од N навојка бакарне жице. Одредити интензитет магнетног поља H_0 и интензитет магнетне индукције B_0 у тачки која се налази у центру датог шестоугла.

Бројни подаци: $I = 5 \text{ A}$, $a = 10 \text{ cm}$ и $N = 3$

Решење:

Магнетно поље које потиче од једног навојка шестоугаоног рама је:



Слика 1.1.9.

$$H_{o1} = 6 \frac{I}{4\pi \frac{a\sqrt{3}}{2}} (\sin 30^\circ - \sin(-30^\circ)) = \frac{\sqrt{3}I}{\pi a}$$

Магнетно поље од три навојка шестоугаоног рама је:

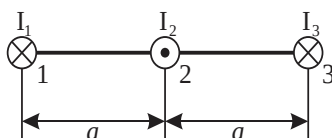
$$H_{o3} = 3H_{o1} = 3 \frac{\sqrt{3}I}{\pi a} = 82,7 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Магнетна индукција у центру датог шестоугла је:

$$B_0 = \mu_0 H_{03} = 0,104 \text{ mT}.$$

1.1.14. На слици 1.1.14.1. су приказана три паралелна дугачка праволинијска проводника са струјама I_1 , I_2 и I_3 са смеровима као на слици. Ако је познато растојање између проводника израчунати вредност електромагнетне силе која делује на дужину l првог проводника. Систем се налази у ваздуху. Пермеабилност вакуума је: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.

Бројни подаци: $I_1=50 \text{ A}$, $I_2=100 \text{ A}$, $I_3=60 \text{ A}$, $a=10 \text{ cm}$ и $l = 1 \text{ m}$.



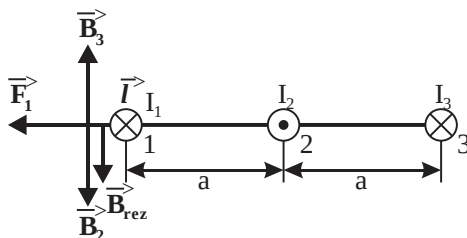
Слика 1.1.14.1.

Решење:

Магнетна индукција на месту првог проводника једнака је збиру магнетних индукција које потичу од струја у другом и трећем проводнику

$$B_{rez} = B_2 - B_3$$

$$B_{rez} = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi a} - \mu_0 \frac{I_3}{4\pi a}$$



Слика 1.1.14.2.

$$B_{rez} = \frac{\mu_0}{2\pi a} \left(I_2 - \frac{I_3}{2} \right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \cdot 130 \text{ A} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Електромагнетна сила која делује на први проводник је:

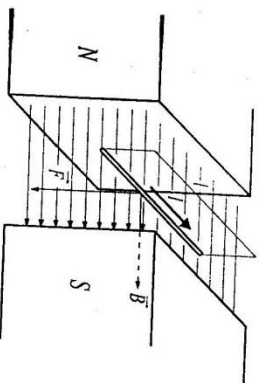
$$\vec{F}_1 = I(\vec{l} \times \vec{B}_{rez}) = I l B_{rez} = 50 \text{ A} \cdot 1 \text{ m} \cdot 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ T} = 70 \cdot 10^{-4} \text{ N} = 7 \text{ mN}$$

Ипомена: Ако немате већ препоручену литературу у наставку је дато само оно најосновније.

1.2. Zakon o elektromagnetnoj sili

Mehanički moment elektromagnetnih sila što deluju na probnu strujnu konturu rezultat je dejstva elementarnih sila što napadaju pojedine elemente te konture. Razume se da se iz relacije (1.1), koja je dobijena eksperimentom i koja opisuje integralno dejstvo polja na zatvorenu konturu, ne može neposredno otkriti zakon o elektromagnetnoj sili što deluje na jedan strujni element. Obrnuto je, naravno, moguće, pa će relacija (1.1) biti izvedena iz poznatog zakona, koji je inače fundamentalan i potreban za izračunavanje elektromagnetnih sila na provodnike sa strujom u proizvoljnim magnetnim poljima.

Pošto je eksperimentalno iskustvo o kome je bilo reči u prethodnom odeljku samo deo onoga što je potrebno da bi se do kraja osvetlio zakon o elektromagnetnoj sili, nužno je pribeci novim ~~ad~~opunskim eksperimentima. Pri tome se polje vektora magnetne indukcije $\vec{B}$ može odrediti postupkom koji je opisan u prethodnom odeljku.



Slika 1.3

tu gde se nalazi provodnik se može praktično ostvariti između polova poklovičastog magnetu, čiji se polovi nalaze na malom rastojanju, ili pak pomoću struje u drugom provodniku koji je paralelan ispitivanom.

Eksperiment pokazuje da je elektromagnetna sila F uvek normalna na ravan koju obrazuju pravci provodnika i polja. Rezultantna sila deluje u sredini provodnika, a smer joj zavisi od smera struje i smera magnetnog polja. U slučaju smera struje i polja kao na slici 1.3 smer sile je orijentisan nadole.

Intenzitet sile je srazmeran jačini struje I i dužini l provodnika, a koeficijent k nazivamo intenzitet magnetne indukcije B , definisan i izmeren na osnovu vi postupka opisanog u prethodnom odeljku. Dakle,

$$F = IlB.$$

Ustaviti, na osnovu (1.6) proizilazi da se magnetna indukcija u homogenom magnetnom polju može i definisati i izmeriti na osnovu merenja elektromagnetne sile koja deluje na provodnik sa strujom koji je upravan na pravac polja.

$$B = \frac{F}{Il}. \quad (1.7)$$

Obrazac (1.6) važi za slučaj kada je pravac provodnika upravan na pravac magnetnog polja. Međutim, ako se provodnik postavi tako da njegova osa, orijentisana prema struji, zaklapa ugao α sa pravcem magnetnog polja, sila ima intenzitet

$$F = IlB \sin \alpha, \quad (1.8)$$

Pri tome je pravac sile i dalje upravan na ravan što je obrazuju pravci ose provodnika i polja. Što sa tice smera, on se najjednostavnije i precizno određuje iz vektorskog oblika izraza za elektromagnetnu silu koji se može napisati u formi vektorskog proizvoda

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} \quad (1.9)$$

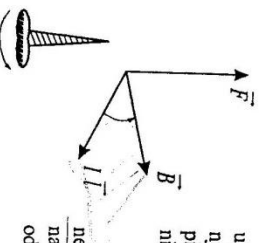
gde je $\vec{l}$ orijentisana dužina provodnika, čiji smer odgovara smeru struje. Obrazac (1.9) jednoznačno određuje intenzitet, pravac i smer elektromagnetne sile. Intenzitet vektora $\vec{F}$ je $IlB \sin \alpha$, pravac mu je normalan na ravan što je obrazuju vektori $\vec{l}$ i $\vec{B}$, a smer mu se određuje po pravilu desne zavojnice prevođeci vektor $\vec{l}$ u vektor $\vec{B}$ rotacijom za manji ugao između ova dva vektora (slika 1.4). Kada su vektori $\vec{l}$ i $\vec{B}$ kolinearni tada je $\vec{F} = 0$.

Sila $\vec{F}$ koja deluje na prav provodnik dužine l ustvari je rezultanta elementarnih sila što deluju na njegove elemente. Na osnovu (1.9) se može direktno napisati izraz za silu koja deluje na element tankog provodnika sa strujom u magnetnom polju:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (1.10)$$

U opštem slučaju, kada je provodnik kriv a magnetno polje nehomogeno, rezultantna elektromagnetna sila na provodnik dužine l se dobije kao geometrijski zbir, odnosno integral, elementarnih sila (1.10),

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B} \quad (1.11)$$



Slika 1.4

gde je $\vec{B}$ magnetna indukcija na mestu gde se nalaze pojedini elementi.

Kada se $d\vec{l}$ i $\vec{B}$ predstavljaju preko svojih Dekartovih komponenta,

$$d\vec{l} = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$$

$$d\vec{B} = \hat{x} B_x + \hat{y} B_y + \hat{z} B_z,$$

gde su $\hat{x}, \hat{y}$ i $\hat{z}$ ortovi osa x, y i z , izraz za silu se može napisati u obliku

2. Magneto polje stacionarne struje u vakuumu

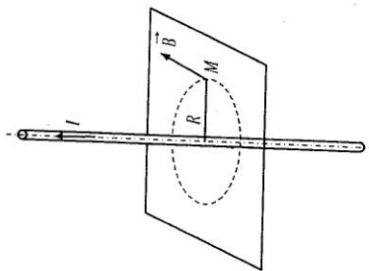
† 2.2. Bio-Savarov zakon

U prethodnom poglavlju je definisana prva i osnovna kvantitativna karakteristika magnetnog polja – magnetska indukcija $\vec{B}$ – i pokazano je, bar u principu, kako se ona može *izmeriti* preko momenta elektromagnetnih sila, odnosno preko same elektromagnetne sile. U ovom poglavlju, međutim, biće reči o osnovnim zakonima i metodima koji omogućuju *izračunavanje* magnetne indukcije kada je poznata geometrija strujne konture i jačina struje u njoj. Biće obrađeno i nekoliko jednostavnih ali važnih primera određivanja magnetne indukcije. Pri tome ćemo se, za sada ograničiti samo na polja koja potiču od stacionarnih struja u vakuumu i u sredinama čije se magnetne osobine neznatno razlikuju od magnetnih osobina vakuumu. Sa gledišta praktične elektrotehlike u ovu kategoriju spada većina supstanci, sem feromagnetnih.

Kao polaznu tačku u izučavanju relativno složenih odnosa između električne struje i sa njom povezanog magnetnog polja uzećemo dobro poznati Bio-Savarov (Jean-Baptiste Biot, 1774-1862. i Felix Savart, 1791-1841). Ponavljajući Erstedove eksperimente, Bio i Savart već 1820. g. otkrivaju zakon prema kome struja u dugom, pravolinijskom provodniku stvara magnetnu indukciju B , čiji je intenzitet srazmeran jačini struje, I , a obrnuto je srazmeran odsojajanju R posmatrane tačke M od provodnika,

$$B = k \frac{I}{R} \quad (2.1)$$

Vektor indukcije je upravan na ravan koja prolazi kroz osu provodnika i tačku posmatranja M (slika 2.1). Smer vektora $\vec{B}$ se određuje po pravilu desne zavojnice u odnosu na smer struje u provodniku. Linije magnetnog polja u ovom slučaju su koncentrični krugovi u ravni normalnim na osu provodnika i sa centrima na ovoj osi. Do ovih rezultata Bio i Savart su došli na osnovu merenja periode oscilacija magnetne igle obešene na torzionalnoj vazii u blizini provodnika, odstranjujući naodim postupkom uticaj Zemljinog magnetnog polja.



Koeficijent proporcionalnosti k predstavlja fizičku konstantu čija veličina zavisi od izbora jedinica za merenje magnetne indukcije, jačine struje i odsto-

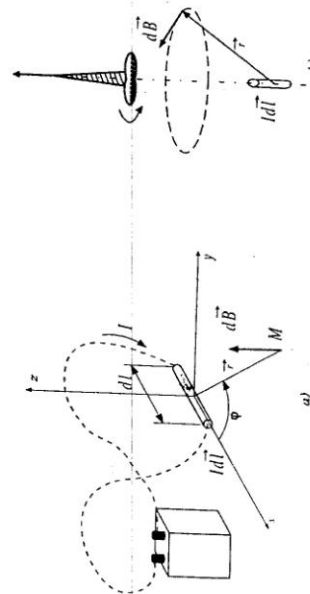
$$K (= B I l^{-1})$$

O alternativnom načinu pisanja konstante proporcionalnosti u Bio-Savarovom zakonu, njenoj jedinici i načinu njenog određivanja će biti reči malo kasnije.

U nastojanju da otkrije postupak koji bi omogućio izračunavanje magnetnog polja i magnetne indukcije proizvoljne strujne konture, Bio polazi od principa superpozicije i zaključuje da je vektor magnetne indukcije u nekoj tački geometrijski zbir elementarnih indukcija koje potiču od pojedinih elemenata strujne konture. Međutim, put da se dode do

Slika 2.1

izraza za magnetnu indukciju jednog izolovanog strujnog elementa nije jednostavan, jer se takav element ne može fizički realizovati, pa se ni indukcija koju on stvara ne može direktno meriti. Pošto se mogu realizovati samo zatvorene strujne konture, ostaje da se na osnovu izmerenih vrednosti magnetne indukcije zatvorenih strujnih kontura jednostavne geometrije (kao, na primer, neograničena strujna nit, koja se zatvara u beskonačnosti) putem intuicije otkrije zakon koji određuje magnetnu indukciju jednog strujnog elementa. Iako neposredna zasluga za otkriće ovog zakona pripada Biotu, u literaturi se i ovaj zakon najčešće naziva Bio-Savarov zakon



Slika 2.2

2. Magneto polje stacionarne struje u vakuumu

Zanimljivo da je strujna kontura na slici 2.2.a razložena na elemente $d\vec{l}$, čije su smeru struje I u konturi. Ako sa $d\vec{r}$ obeležimo vektor položaja tačke poranja M u odnosu na element $d\vec{l}$, onda je intenzitet magnetne indukcije $d\vec{B}$, što od struje u elementu $d\vec{l}$, srazmeran proizvodu Idl , obrnuto je srazmeran kvadratu udaljenosti r i direktno srazmeran sinusu ugla ϕ što ga zaklapa element $d\vec{l}$ sa potezom od elementa do tačke M . Prema tome,

$$dB = k_1 \frac{Idl}{r^2} \sin \phi.$$

Koeficijent proporcionalnosti k_1 ima istu dimenziju kao i koeficijent k u izrazu (2.1) i nije identičan.

Vektor $d\vec{B}$ je normalan na ravan što je obrazuju vektori $I d\vec{l}$ i $\vec{r}$, a smer mu je određen po pravilu desne zavojnice u odnosu na smer struje (slika 2.2.b).

Sve što je napred rečeno u pogledu intenziteta, pravca i smera vektora $d\vec{B}$ može različi u kompaktnoj vektorskoj formi, uz pomoć vektorskog proizvoda

$$d\vec{B} = k_1 \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

gde $\hat{r}$ predstavlja ort potega $\vec{r}$, $\hat{r} = \vec{r}/r$.

Usvojeno je da se konstanta k_1 piše u obliku $\mu_0/4\pi$, a nova konstanta μ_0 se naziva permeabilnost vakuumu. Pisanje konstante u obliku $\mu_0/4\pi$ ima tu prednost da se 4π ne pojavljuje eksplicitno u formulama koje su u češćoj upotrebi nego formula (2.23). Prema tome, diferencijalni oblik Bio-Savarovog zakona ćemo pisati u sledećoj formi:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

S obzirom na to da se izolovani element stacionarne struje ne može fizički realizovati, ni Bio-Savarov zakon u obliku (2.4) se ne može direktno eksperimentalno proveriti. On se proverava indirektno, proverom rezultata koji se dobiju kada se zakon primenjuje izračunavanje magnetnog polja zatvorenih strujnih kontura ili njihovih konačnih delova. Vektor magnetne indukcije što je stvara proizvoljna strujna kontura C , može se pisati u obliku integrala

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Treba naglasiti da se u integralu (2.5) radi o vektorskom sumiranju elementarnih indukcija $d\vec{B}$.

Vratimo se sada na magnetnu permeabilnost μ_0 . Kao i konstante k_1 i k , permeabilnost ima dimenziju

$$\mu (= B I l^{-1}) (= F I^{-2}), \quad T = \frac{N}{A \cdot m}$$