

## РЕДНЕ И ПАРАЛЕЛНЕ ВЕЗЕ R, L и C ЕЛЕМЕНАТА

1. На крајеве кола, које садржи редну везу отпорника отпорности  $R$ , калема индуктивности  $L$  и кондензатора капацитивности  $C$ , прикључен је напон  $U$ , учестаности  $f$ . Одредити:

- a) Импедансу кола ( $Z$ ),
- b) Струју у колу ( $I$ ),
- c) Напоне на појединим елементима кола ( $U_a, U_L, U_C$ ),
- d) Фазну разлику између напона и струје

Бројни подаци:  $R = 30\Omega$ ,  $L = 255mH$ ,  $C = 80\mu F$ ,  $U = 100V$ ,  $f = 50\text{ Hz}$ .

Решење:

$$a) \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{30^2 + \left(314 \cdot 0,255 - \frac{10^6}{314 \cdot 80}\right)^2} = 50 \Omega.$$

$$b) \quad I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{50} = 2A$$

$$c) \quad U_a = R \cdot I = 30 \cdot 2 = 60V$$

$$U_L = X_L I = 80 \cdot 2 = 160V$$

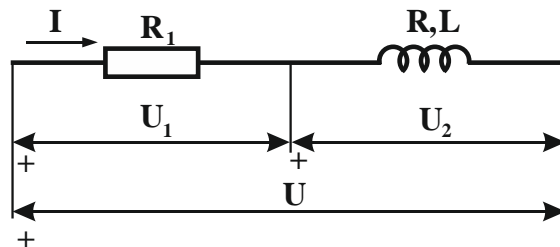
$$U_C = X_C I = 40 \cdot 2 = 80V$$

$$d) \quad \varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{80 - 40}{30} = \arctg \frac{4}{3} = 53^\circ 10'$$

2. У колу на слици:

- a) Одредити индуктивност  $L$  и отпорност  $R$  калема.
- b) Колика мора да буде капацитивност кондензатора  $C$ , који везан на ред са калемом чини да фактор снаге целе везе буде максималан?
- c) Колика је активна снага за случај под b).

Бројни подаци:  $R_1 = 100\Omega$ ,  $U = 85V$ ,  $U_1 = 50V$ ,  $U_2 = 60V$ ,  $f = 50\text{ Hz}$ .



Слика 2.

Решење:

$$a) \quad I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{50V}{100\Omega} = 0,5A$$

$$Z_2 = \frac{U_2}{I} = \frac{60 \text{ V}}{0,5 \text{ A}} = 120 \Omega$$

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$(\omega L) = X_L$  је индуктивна отпорност калема

$$Z_e = \sqrt{(R + R_1)^2 + (\omega L)^2}; \quad Z_e = \frac{U}{I} = \frac{85 \text{ V}}{0,5 \text{ A}} = 170 \Omega$$

$$(R + R_1)^2 + (\omega L)^2 = Z_e^2 = 170^2 \text{ и}$$

$$R^2 + (\omega L)^2 = Z_2^2 = 120^2$$

$$R = \frac{Z_e^2 - Z_2^2 - R_1^2}{2R_1} = \frac{(170)^2 - (120)^2 - (100)^2}{2 \cdot 100} \Omega = 22,5 \Omega$$

$$\omega L = \sqrt{Z_2^2 - R^2} \rightarrow L = \frac{\sqrt{Z_2^2 - R^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{(120)^2 - (22,5)^2} \Omega}{2\pi \cdot 50 \text{ Hz}} = 0,375 \text{ H}$$

$$\text{b) } Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = \sqrt{(R + R_1)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ где је } \frac{1}{\omega C} = X_c$$

из услова:

$$X_e = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

следи

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(2\pi \cdot 50)^2 \frac{1}{s^2} 0,375 \text{ H}} = 27 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 27 \mu\text{F}.$$

с) активна снага кола је:  $P = UI \cos \varphi$

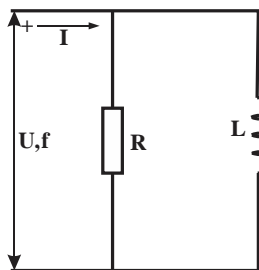
Струја и напон су у фази па је  $\cos \varphi = 1$ ,  $X_c = 0$ , активна снага је  $P = UI$

$$P = U \frac{U}{R + R_1} = \frac{(85)^2}{100 + 22,5} \text{ W} = 59 \text{ W}$$

**3.** На паралелно RL коло прикључен је напон  $U$ , фреквенције  $f$ . Отпорност отпорника је  $R$  а индуктивност калема  $L$ . Одредити:

- Компонентне струје у паралелним гранама кола и резултантну струју кола;
- Импедансу еквивалентног пријемника састављеног од редне везе отпорника и калема.

Бројни подаци:  $U=60 \text{ V}$ ,  $f=50 \text{ Hz}$ ,  $R=20 \Omega$ ,  $L=47,8 \text{ mH}$ .



Слика 3.

Решење:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 314 \cdot 47,8 \cdot 10^{-3} = 15 \Omega$$

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{60}{20} = 3 \text{ A}$$

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{60}{15} = 4 \text{ A}$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ A}$$

$$Z_{ekv} = \frac{U}{I} = \frac{60}{5} = 12 \Omega$$

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I} = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \sin \varphi = \frac{I_L}{I} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$R_{ekv} = Z_{ekv} \cdot \cos \varphi = 12 \cdot 0,6 = 7,2 \Omega$$

$$X_{Lekv} = Z_{ekv} \cdot \sin \varphi = 12 \cdot 0,8 = 9,6 \Omega$$

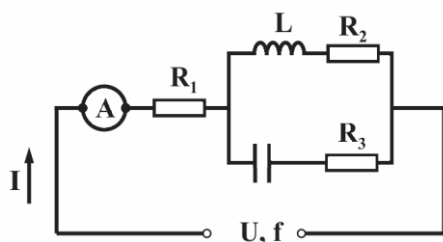
4. За коло наизменичне струје на слици одредити:

а) Показивање амперметра у колу  $I_A = ?$

б) Привидну снагу кола  $S$  и фактор снаге кола  $\cos \varphi$ . Нацртати фазорски дијаграм и објаснити какав карактер има коло.

Унутрашњу отпорност амперметра занемарити.

Бројни подаци:  $U = 250 \text{ V}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 20 \Omega$ ,  $L = 60 \text{ mH}$ ,  $C = 150 \mu\text{F}$ .



Слика 4.1.

Решење:

$$\omega = 2\pi f ;$$

Еквивалентна импеданса кола је:

$$Z_e = R_e + jX_e = R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L) \cdot \left( R_3 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R_2 + j\omega L + R_3 + \frac{1}{j\omega C}} = 25 \Omega$$

a) Показивање амперметра у колу је:

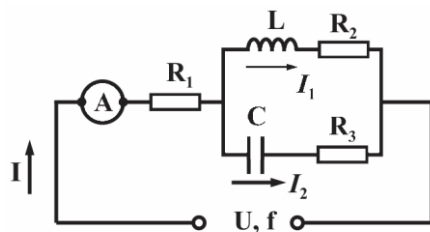
$$\underline{I} = \underline{I}_A = \frac{U}{\underline{Z}_e} = 10A$$

Струја у грани која садржи L и R<sub>2</sub> је:

$$\underline{I}_1 = \frac{U - R_1 I}{R_2 + j\omega L} = (2,2 - j4,14)A$$

Струја у грани која садржи C и R<sub>3</sub> је:

$$\underline{I}_2 = \frac{U - R_1 I}{R_3 + \frac{1}{j\omega C}} = (7,8 + j4,14)A$$



Слика 4.2.

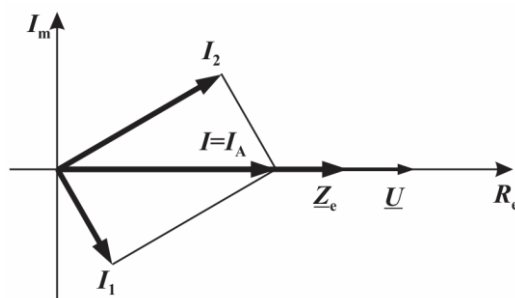
b)  $P = R_e \cdot I^2 = 2500 \text{ W}$

$$Q = X_e \cdot I^2 = 0 \text{ VAr}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$S = P = 2500 \text{ VA}$$

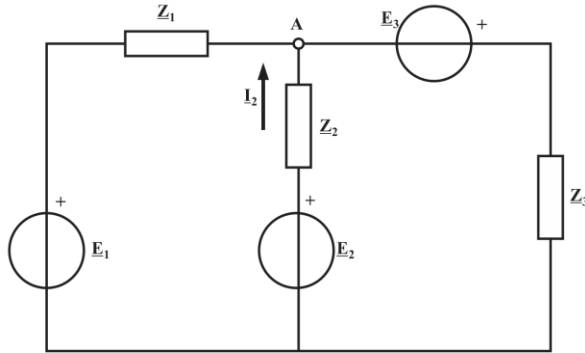
$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = 1$$



Слика 4.3.

Из фазорског дијаграма на слици 4.3. се види да су напон  $\underline{U}$  и струја  $\underline{I}$  у фази. Цело коло се понаша као активни пријемник и може се еквивалентирати са отпорником чија отпорност износи  $R_e = 25 \Omega$ .

5. Методом Кирхофових закона одредити комплексне изразе за струје свих грана кола. Бројни подаци:  $\underline{E}_1 = (100 - j130)V$ ,  $\underline{E}_2 = (50 - j150)V$ ,  $\underline{E}_3 = (50 - j25)V$ ,  $\underline{Z}_1 = 100\Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = -j100\Omega$ ,  $\underline{Z}_3 = (300 - j50)\Omega$ .



Слика 5.1.

Решење:

Коло садржи 2 чвора и три гране. У том случају по првом Кирхофовом закону пишу се једначине за  $(n_\zeta - 1)$  чворова у колу. Како је овде број чворова  $n_\zeta = 2$ , једначина написана по првом Кирхофовом закону за чвор А гласи:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

а преостале једначине, којих има  $ng - (n_\zeta - 1) = 2$ , пишу се по другом Кирхофовом закону за два затворена пута у колу означена на слици. Смерови контура су изабрани произвољно, а једначине имају облик:

$$-\underline{E}_1 - \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{E}_2 = 0$$

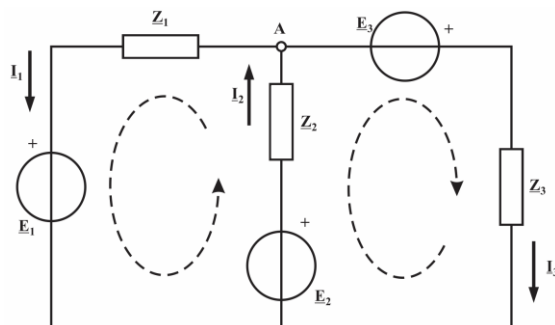
$$\underline{E}_2 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3 + \underline{E}_3 = 0$$

Овим се комплетира систем једначина по непознатим струјама.

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \tag{1}$$

$$-\underline{E}_1 - \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{E}_2 = 0 \tag{2}$$

$$\underline{E}_2 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3 + \underline{E}_3 = 0 \tag{3}$$



Слика 5.2.

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0 \\ -\underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 &= \underline{E}_1 - \underline{E}_2 \\ \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 &= (\underline{E}_2 + \underline{E}_3) \end{aligned}$$


---

Из прве једначине је  $\underline{I}_1 + \underline{I}_3 = \underline{I}_2$ .

Заменимо  $\underline{I}_2$  у другој и трећој једначини:

$$\begin{aligned} -\underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 (\underline{I}_1 + \underline{I}_3) &= \underline{E}_1 - \underline{E}_2 \\ \underline{Z}_2 (\underline{I}_1 + \underline{I}_3) + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 &= (\underline{E}_2 + \underline{E}_3) \end{aligned}$$

Заменом познатих бројних вредности добијамо:

$$\begin{aligned} -100 \underline{I}_1 + j100 (\underline{I}_1 + \underline{I}_3) &= (100 - j130) - (50 - j150) \\ -j100 (\underline{I}_1 + \underline{I}_3) + (300 - j50) \underline{I}_3 &= (50 - j150) + (50 - j25) \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned} (-100 + j100) \underline{I}_1 + j100 \underline{I}_3 &= 50 + j20 \\ -j100 \underline{I}_1 + (300 - j150) \underline{I}_3 &= 100 - j175 \end{aligned}$$


---

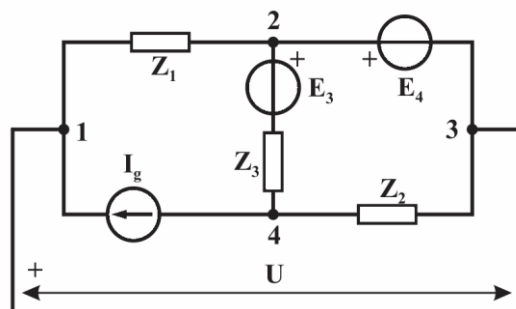
Овај систем једначина можемо решити методом замене.

Решавањем система једначина добијамо:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= (-0,2 + j0,1) \text{ A} \\ \underline{I}_2 &= (0,3 - j0,3) \text{ A} \\ \underline{I}_3 &= (0,5 - j0,4) \text{ A} \end{aligned}$$

**6.** За коло простопериодичне струје приказано на слици 6.1. одредити  $\underline{Z}_3$  тако да напон  $\underline{U}_{24}$  буде једнак нули.

Бројни подаци:  $\underline{U} = (10 - j5) \text{ V}$ ,  $\underline{E}_3 = j13 \text{ V}$ ,  $\underline{E}_4 = (3 - j4) \text{ V}$ ,  $\underline{I}_g = 100(2 + j) \text{ mA}$ ,  
 $\underline{Z}_1 = (30 - j40) \Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = (30 + j10) \Omega$ .



Слика 6.1.

Решење:

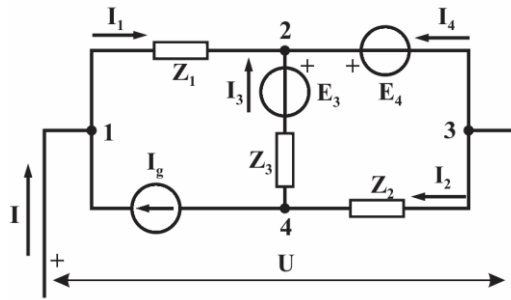
Примењујући I и II Кирхофов закон у комплексном облику решићемо ово коло. Према усвојеним референтним смеровима за струје (слика 2.4.2.2.), напон  $\underline{U}_{24}$  је:

$$\underline{U}_{24} = -\underline{Z}_3 \underline{I}_3 + \underline{E}_3.$$

Да би одредили овај напон потребно је наћи струју  $\underline{I}_3$ . Применом II Кирхофовог закона на контуру 2-3-4-2 може се одредити струја  $\underline{I}_2$ :

$$\underline{U}_{24} - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{E}_4 = 0.$$

Како је  $\underline{U}_{24} = 0$ , добија се:



Слика 6.2

$$\underline{I}_2 = -\frac{\underline{E}_4}{\underline{Z}_2} = \frac{-3 + j4}{30 + j10} \text{ A} = (-50 + j150) \text{ mA}.$$

Применом I Кирхофовог закона на чвор 4 одређује се струја  $\underline{I}_3$ .

$$\underline{I}_3 + \underline{I}_g - \underline{I}_2 = 0 \Rightarrow \underline{I}_3 = -\underline{I}_g + \underline{I}_2 = (-250 + j50) \text{ mA}.$$

Из услова да је  $\underline{U}_{24} = -\underline{Z}_3 \underline{I}_3 + \underline{E}_3 = 0$  одређује се  $\underline{Z}_3$ :

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{E}_3}{\underline{I}_3} = \frac{j13 \text{ V}}{(-0,25 + j0,05) \text{ A}} = (10 - j50) \Omega.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. А.Ђорђевић: Основи електротехнике, 3. део, Електромагнетизам, Академска мисао, Београд, 2007.
2. М.Ђуцаковић, Електротехника, Збирка задатака, Машински факултет, Београд, 1994.
3. А. Гавриловић: Основи електротехнике, Збирка решених задатака, Виша електротехничка школа, Београд, 2005.
4. Д. М. Шкатарић, Н. В. Ратковић, Т. М. Стојић, П. М. Лукић: Збирка решених задатака из Електротехнике, Универзитет у Београду – Машински факултет, Београд, 1999.
5. Р. Марковић: Збирка решених задатака из Основа електротехнике 2, ВТШСС Звечан, 2016.