7 МЕТОДЕ И ТЕХНИКЕ ПРОГРАМИРАЊА

7.1 МЕТОДЕ ПРОГРАМИРАЊА

У складу са временским захватом у оквиру пројектовања програмске оријентације као најзначајније методе математичког програмирања треба навести следеће:

1. динамичко програмирање,
2. линеарно програмирање,
3. параметарско програмирање,
4. стохастичко програмирање и
5. нелинеарно програмирање.

Као посебна техника планирања веома широко у примени је техника мрежног планирања.

7.1.1 Техника мрежног планирања

Први забележен покушај планирања овом методом је планирање ремонта хемијске опреме у америчкој компанији DUPON (1957. године). У разради плана, коришћене су одређене вредности за трајање активности. Назив ове варијанте је CPM (Critical Parth Method – метода критичног пута). Циљ је био да се одреди најдуже потребно трајање пројекта (критични пут).

Касније се развија нова варијанта ове технике тзв. PERT, где је суштина да се одреде рокови трајања појединих активности и рок целог пројекта најранији и најкаснији. Анализирају се трајање активности PERT (Program Evalution and Review Techniqe – метода оцене и ревизије програма). Пуна афирмација ове методе је тек са употребом електронских рачунарских система. Уопште, ове методе се примењују у следећим случајевима:

- програмирање научно-истраживачког рада,
- програмирање пројектно-конструктивних активности,
- испитивање разних објеката,
- развој и освајање нових производа,
- пројектовање и развој производних капацитета великих система,
- реконструкција и ремонт индустријских постројења,
- програмирање комплексних пословних захтева.

Примена ове методе омогућава:

1. прогнозирање рокова завршетка целокупног посла PERT – време,
2. предвиђање трошкова за цео пројекат PERT – трошкова,
3. откривање „критичних“ активности, метода критичног пута CPM,
4. прегруписавање радне снаге и средстава ради интензивирања „критичних“ активности.

Приликом планирања било ког подухвата јављају се две категорије:

- Догађај, односно тренутак када неки посао започне или се завршава,
- Активност, пословна или производна операција извршавања задатака за које је потребно време и изискује радну снагу, материјал, коришћење опреме и просторија.

Активност може бити:

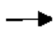
1. стварни рад,
2. чекање,
3. зависност (постојање логичке везе између две активности).

На основу претходно реченог може се закључити да се сваки пројекат може интерпретирати као низ активности,

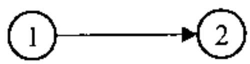
- које се надовезују ако су зависне и
- обављају истовремено, ако су независне.

За графичко приказивање мрежног дијаграма усвојени су следећи симболи:

 - „Догађај“ (уписана бројка у кружићу представља шифру тока догађаја),

 - „Активност“ која је означена бројевима претходног и следећег догађаја.

<u>ПРИМЕР</u>.



где је:

1. Догађај – почетак пројекта,

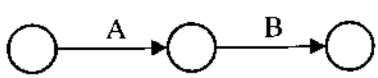
1- 2. Активност – пројектује се нов производ,

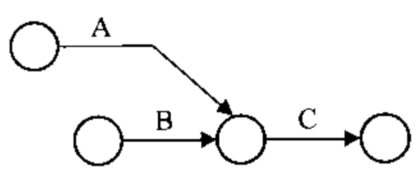
2. Догађај – пројекат завршен.

Пројектовање мрежног дијаграма заснива се на правилима, која омогућавају једнозначно тумачење односа исказаних графичким истраживањем.

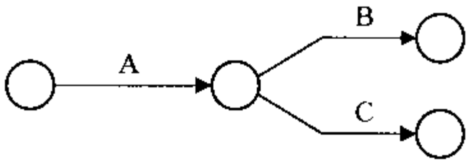
Правила су:

1. Свака активност је означена као дуж са стрелицом слева на десно и омеђена догађајем почетка и завршетка,
2. Ако уочена активност може започети да се остварује ако су неке претходно окончане, онда се приказују.

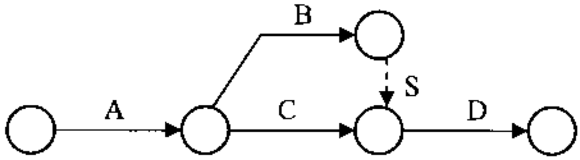


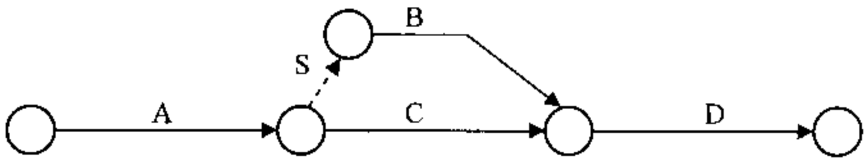


3. Ако једна или више активности могу започети да се остварују пошто је нека активност окончана, онда је завршни догађај претходне активности уједно и почетни догађај наредне активности.

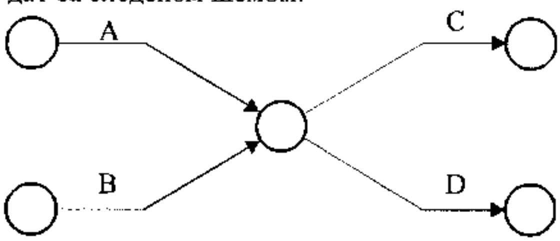


4. Ако две активности имају заједнички почетак и завршни догађај, недовољна одређеност таквог односа превазилази се увођењем привидне активности (S) на следећи начин:

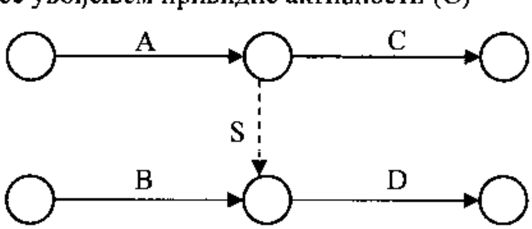




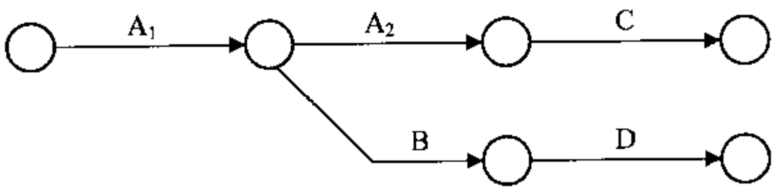
5. Када се у једном догађају завршава и започиње више активности, а између тих активности постоји условљеност, тада је почетни мрежни дијаграм дат са следећом шемом:



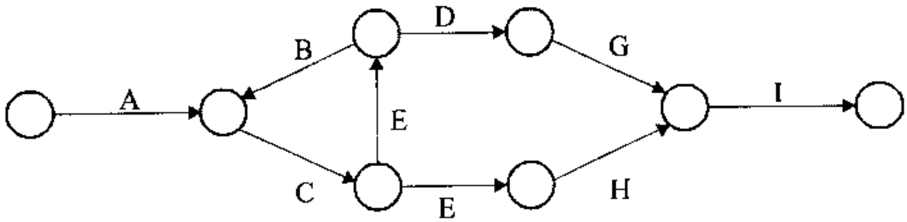
а трансформише се увођењем привидне активности (С)



6. Уколико уочена активност може отпочети пре окончања одређене активности која јој предходи (почетна варијанта).



7. Ни једна активност приказана у мрежном дијаграму не може се понављати (у мрежном дијаграму не јављају се „петље“).

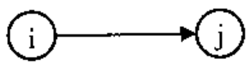


7.1.1.1 Фулкерсоново правило нумерисања догађаја

За обележавање догађаја и активности користи се Фулкерсоново правило које има карактер растућег сукцесивног означавања.

Користе се бројеви из скупа од 1 до n, где је 1 почетни догађај (може и 0).

Општи случај активности (i – j)



$i < j$

где је:

i – почетни догађај,

j – завршни догашај.

Пројектовање мрежног дијаграма обухвата веома значајну радњу: Анализу структуре активности којима се утврђују међусобни односи суделујућих активности у складу са технологијом рада на реализацији.

Потребно је специфицирати све активности које су потребне и утврдити њихов редослед – узајамни однос, зависност и могућност истовременог обављања појединих активности.

<u>ПРИМЕР</u>: Освајање новог производа.

A – пројектовање новог производа,

B – пројектовање нове технологије процеса израде алата,

C – израда прототипа,

D – испитивање прототипа,

E – израда алата,

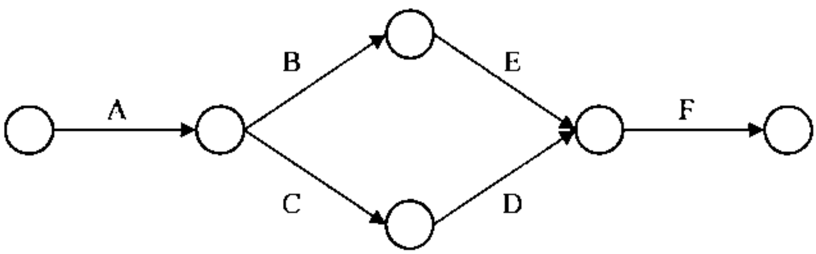
F – производња нулте серије.

На основу анализе међусобних зависности активности, разрађује се матрица зависности активности, која се зове и „1/2 табеле“.

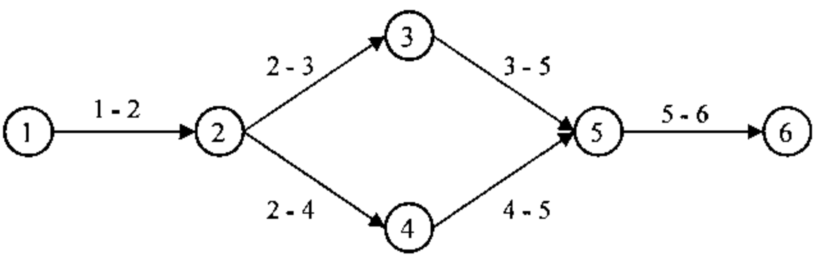
Посматране активности / Претходне активности	A	B	C	D	E	F
	1	2	3	4	5	6
A		×	×			
B					×	
C				×		
D						×
E						×
F						

сл.7.1. Матрица зависности активности

Прва варијанта мрежног дијаграма:



Ако применимо Фулкерсоново правило, мрежни дијаграм би изгледао:



Може се уочити да један догађај може претходити двема и више активностима, а које се могу обављати истовремено. Исто тако један догађај може представљати завршетак више активности које се обављају паралелно, али не значи да ће се и завршити истовремено. У пројектовању мрежног дијаграма треба укључити и временску димензију јер свака активност изискује потрошњу времена.

Обзиром на стохастичну природу активности, трајање активности се одређује као:

(a) – оптимистичко минимално време,
(m) – највероватније – најбоља процена,
(b) – песимистичко – максимално време.

На основу ових времена одређујемо просечно или очекивано време (te):

$$te = k_1(a+b) + k_2(m).$$

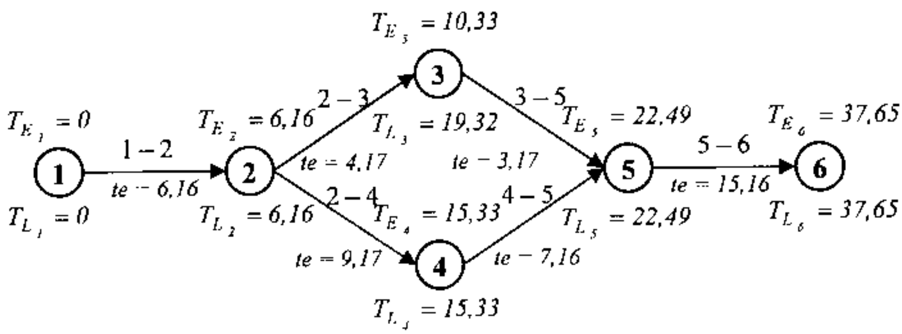
За β – расподелу (нормалну расподелу) имамо да је $k_1 = \frac{1}{6}$ и $k_2 = \frac{2}{3}$, па је сада

$$te = \frac{a+b+4m}{6}.$$

На основу процене, времена су дата табеларно.

Активност	a	m	b	te
1 – 2	4	6	9	6,16
2 – 3	3	4	6	4,17
2 – 4	7	9	12	9,17
4 – 5	5	7	11	7,16
3 – 5	2	3	5	3,17
5 – 6	12	15	19	15,16

На основу ових података црта се PERT мрежа.



За било који догађај може се одредити временски рок када најраније може да наступи уз претходно обављене све активности. Ово време је T_E. Ова вредност се добија сабирањем временског трајања свих активности (te) које се претходно морају обавити.

ПРИМЕР 1: Догађај (5) може наступити када се обаве претходне активности – узимају се оне које дуже трају. За програмирање је веома битно утврдити рокове када се најкасније могу обавити поједине активности, али да се крајњи термин завршетка посла не угрози. Ово време је T_L.

T_L за претходни догађај одређује се тако што се од последњег догађаја одузме очекивано време (te), предвиђено за обављање активности између та два догађаја.

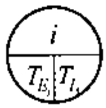
Разлика $T_L - T_E$ је резерва у времену која постоји за наступање неког догађаја а да се не угрози крајњи рок завршетка посла. Уопште може бити:

$$T_L - T_E \gtrless 0,$$

$T_L - T_E > 0$ Посао се може завршити пре планираног рока,
$T_L - T_E = 0$ Нема временских резерви,
$T_L - T_E < 0$ Услови не одговарају планираном (недостају време, средства).

Израчунајмо T_E и T_L и упишимо у мрежу.

Може 

или 

$T_{E_1} = 0,$

$T_{E_2} = T_{E_1} + te\,(1\text{–}2) = 0 + 6{,}16 = 6{,}16$ часова,

$T_{E_3} = T_{E_2} + te\,(2\text{–}3) = 6{,}16 + 4{,}17 = 10{,}33$ часова,

$T_{E_4} = T_{E_2} + te\,(2\text{–}4) = 6{,}16 + 9{,}17 = 15{,}33$ часова,

$T_{E_5} = T_{E_4} + te\,(4\text{–}5) = 15{,}33 + 7{,}16 = 22{,}49$ часова (већа вредност),

$T_{E_6} = T_{E_5} + te\,(5\text{–}6) = 22{,}49 + 15{,}16 = 37{,}65$ часова.

За T_L идемо уназад од завршног догађаја, тј.:

$T_{L_6} = 37{,}65$ часова,

$T_{L_5} = T_{L_6} - te\,(5\text{–}6) = 37{,}65 - 15{,}16 = 22{,}49$ часова,

$T_{L_4} = T_{L_5} - te\,(4\text{–}5) = 22{,}49 - 7{,}16 = 15{,}33$ часова,

$T_{L_3} = T_{L_5} - te\,(3\text{–}5) = 22{,}49 - 3{,}17 = 19{,}32$ часова,

$T_{L_2} = T_{L_4} - te\,(2\text{–}4) = 15{,}33 - 9{,}17 = 6{,}16$ часова (мања вредност),

$T_{L_1} = T_{L_2} - te\,(1\text{–}2) = 6{,}16 - 6{,}16 = 0$ часова.

Из мреже уочавамо да је редослед активности узајамно зависан:

а) 2–3 и 3–5,
б) 2–4 и 4–5.

Низови активности испрекиданих догађајима назива се „ПУТ“. Од свих путева једне мреже „Критичан пут“ је онај код кога је:

- потребно највише времена да би се прешло од првог до последњег догађаја,
- временско закашњење било ког догађаја проузрокује закашњење завршног пројекта.

Код сложених пројеката због доста рачунских операција у савременим условима користе се електронски рачунарски системи – рачунари

Општи методолошки поступак за примену PERT-методе је:

- утврђивање задатака,
- прикупљање информација,
- дефинисање активности и догађаја,
- анализа степена међузависности активности,
- пројектовање мрежног дијаграма,
- одређивање рокова почетка и завршетка активности,
- одређивање носилаца извршавања активности,
- контрола извршена по предвиђеним роковима.

Критичан пут је 1–2–4–5–6 јер је најдуже време трајања пројекта.

7.1.2 Линеарно програмирање

У односу на индустријске потребе, линеарно програмирање може се схватити као математички поступак за одређивање места и начина коришћења средстава, који ће бити најповољнији у датим ограничавајућим условима са становишта дефинисаних циљева. Проблеми који се могу решавати овим методама су:

1. Утврђивање структуре програма и количине производа који ће обезбедити оптимално коришћење расположивих капацитета,
2. Изналажење уских грла у производњи,
3. Одређивање најповољнијег распореда машина,
4. Распоред задатака по радним местима да би се добили најнижи трошкови,
5. Одређивање локације снабдевача како би транспортни трошкови били најмањи.

За решавање ових проблема користи се Симплекс-метода, с обзиром да се иста користи за оптимизацију производног програма, накнадно ће бити обрађена. За сваки производни комплекс постоје извесни елементи чија је величина одређена, нпр. расположиви капацитети (постоје ограничења). Постоје више оваквих елемената, односно система ограничења у оквиру којег се тражи оптимум у односу на постављени циљ.

У овом примеру истраживање оптималног производног програма треба да омогући задовољење:

а) постављеног циља и
б) ограничених могућности за постизање циља.

Проблеми ове врсте у принципу се решавају линеарним програмирањем, али сложеност ове проблематике захтева преиспитивање елемената ради преиспитивања могућности примене линеарног програмирања.

Услови за примену линеарног програмирања су:

1) свака заступљена величина као израз неке активности мора бити прецизно дефинисана да би се разликовала од осталих,
2) ниво активности мора бити мерљив,
3) различите променљиве величине које фигуришу у проблему морају бити међусобно зависне,
4) међусобна зависност величина мора бити линеарна,
5) директна ограничења морају бити дата у нумеричком облику,
6) циљ мора бити функција обухваћених активности и то линеарна,
7) за решавање постављеног проблема мора да постоји известан број алтернативних решења.

На основу горе изнетог за конкретан проблем треба дати у математичком облику:

а) формулацију циља као функцију,
б) формулацију ограничења под којима треба остварити постављени циљ.

Код математичке интерпретације проблема број променљивих величина k (врста производа) мора да се разликује од броја ограничења m изражених у виду неједначина у односу на које треба истраживати оптимум функције циља. Променљиве величине (врсте производа) морају да буду ненегативне, тј. $x_j \geq 0$

$$m \neq k \text{ и } x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., k \tag{7.1}$$

Да би се приказао општи математички модел полази се од претпостављеног случаја.

Предузеће има асортиман производа (k) чије појединачне обиме (x_j) треба утврдити у складу са ограничењима – капацитети којих има (b_i, $i = 1, 2, ..., m$). Ограничења су изражена са (m) једначина или неједначина. Циљ је пронаћи величине обима производног програма којим ће се оптимално користити расположиви капацитети. За сваки од (k) производа утврђена су:

1. Времена оптерећења сваке машине

$$a_{ij}, \; i = 1, 2, ..., m \text{ и } j = 1, 2, ..., k \tag{7.2}$$

2. Укупна времена за израду једне врсте производа c_i где је $j = 1, 2, ..., k$.
   Математички модел гласи: функција критеријума:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_kx_k, \tag{7.3}$$

са ограничењима: $j = 1, 2, ..., k$.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1k}x_k \leq b_1, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{7.4}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2k}x_k \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{ik}x_k \leq b_i$$

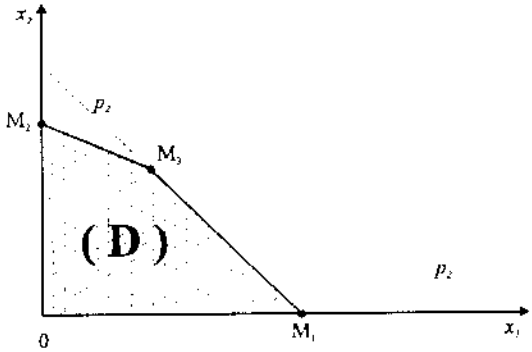
$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mk}x_k \leq b_m.$$

7.1.2.1 Графо-аналитички поступак

Да би напред изнето, било што јасније узмимо најпростији случај (2) променљиве величине и (2) ограничења изражена у неједначинама.

Решење у смислу (max) налази се на следећи начин: У равно Ox_1x_2 омеђена површина са координатним осама и линијом на бази једначина ограничења p_1, p_2 садржи сва решења од којих је максимум у тачки M_3 двоструко шрафиране површине а које задовољава функцију критеријума $z = c_1x_1 + c_2x_2$.



сл.7.2. Графички приказ

Сада ћемо практично урадити један пример.

У једном погону израђују се два дела N_1 и N_2. Оба дела имају по три операције које се обављају на три групе машина M_1 (стругови), M_2 (глодалице) и M_3 (брусилице).

Нормирањем су одређена времена операција за поједини део (Табела 7.1).

Операц. / Део	стругање	глодање	брушење	укупно
N_1	8	6	7	21 min
N_2	12	16	9	37 min

Капацитет машина по групама

M_1	струг	12.000 min
M_2	глодалица	14.500 min
M_3	брусилица	10.000 min
	УКУПНО:	36.500 min

Треба наћи количину делова $N_1 = x_1$ и $N_2 = x_2$ који ће омогућити оптимално коришћење капацитета. Величина потребног капацитета за производњу x_1 и x_2 је Z.

Табеларно сређени подаци (Табела 7.2):

Машина / Део	M_1 (min)	M_2 (min)	M_3 (min)	Укупно (min)
N_1	8	6	7	21
N_2	12	16	9	37
Расположиви капацитет	12.000	14.500	10.000	36.500

Мора бити задовољено: $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$.

Критеријум или функција циља је

$$Z = 21x_1 + 37x_2 \rightarrow \text{ максимално.}$$

Ограничења су (функције ограничења):

$$8x_1 + 12x_2 \leq 12.000$$
$$6x_1 + 16x_2 \leq 14.500$$
$$7x_1 + 9x_2 \leq 10.000$$

Математички модел гласи:

$$Z = 21x_1 + 37x_2 \quad \text{за } x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

$$8x_1 + 12x_2 \leq 12.000$$
$$6x_1 + 16x_2 \leq 14.500$$
$$7x_1 + 9x_2 \leq 10.000.$$

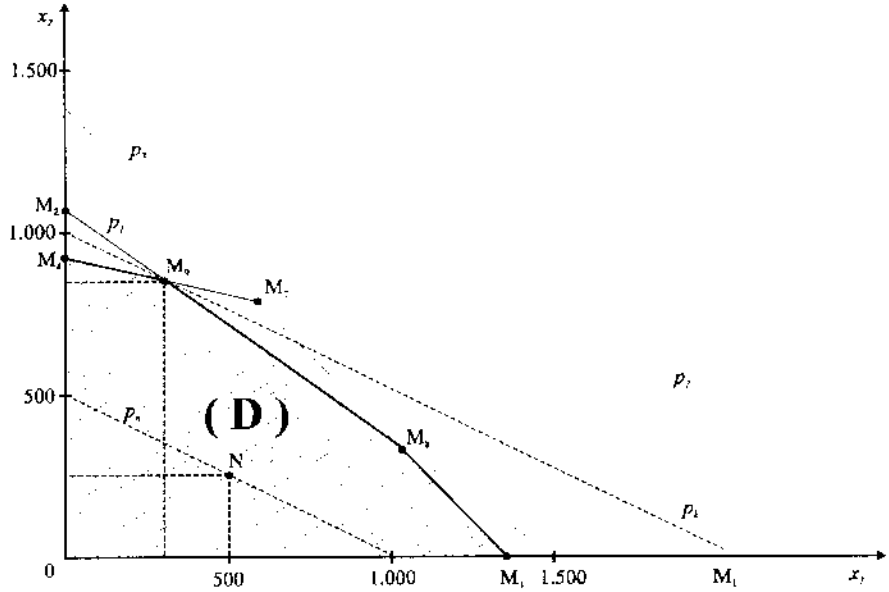
7.1.2.2 Геометријски приказ математичког модела

Функције ограничења можемо дати као једначине:

$$8x_1 + 12x_2 = 12.000$$
$$6x_1 + 16x_2 = 14.500$$
$$7x_1 + 9x_2 = 10.000$$

Прикажимо их као праве линије, све у првом квадранту јер је

$$x_1 \geq 0 \text{ и } z_2 \geq 0.$$



сл.7.3. Геометријски приказ

Све тачке на правој p_1 одсечка M_1, M_2 задовољавају услов:

$$8x_1 + 12x_2 = 12.000, \ x_1 \geq 0.$$

Исти услови ће бити задовољени и за све тачке у првом квадранту унутар изломљене праве M_4, M_9, M_8, M_3 (шрафирана површина).

За тачку N ($x_1 = 500$; $x_2 = 300$) критеријум функције циља износи:

$$21x_1 + 37x_2 = Z$$

$$21 \cdot 500 + 37 \cdot 300 = 10.500 + 11.100 = 21.600.$$

Кроз N повући праву која задовољава функцију циља

$21x_1 + 37x_2 = 21.600$ (права p_n).

Повлачењем паралелне праве са p_n у тачки M_9 (310, 785).

Тачка најудаљенија од координатног почетка добија се функција циља.

$$Z_{M_9} = 21 \cdot 310 + 37 \cdot 785 = 35.500 \text{ min.},$$

За M_4:

$$Z_{M_4} = 21 \cdot 0 + 37 \cdot 906 = 33.550 \text{ min.},$$

За M_8:

$$Z_{M_8} = 21 \cdot 960 + 37 \cdot 550 = 33.150 \text{ min.},$$

За M_5:

$$Z_{M_5} = 21 \cdot 1.430 + 37 \cdot 0 = 30.000 \text{ min.},$$

Најповољнија вредност функције циља је у M_9. Ту ће се постићи најповољније коришћење капацитета. $N_1 = 310$ делова

$N_2 = 785$ делова.

Остаће неискоришћеног капацитета : 36.500 – 35.500 = 1.000 min.

7.2 GANTT-ОВЕ КАРТЕ

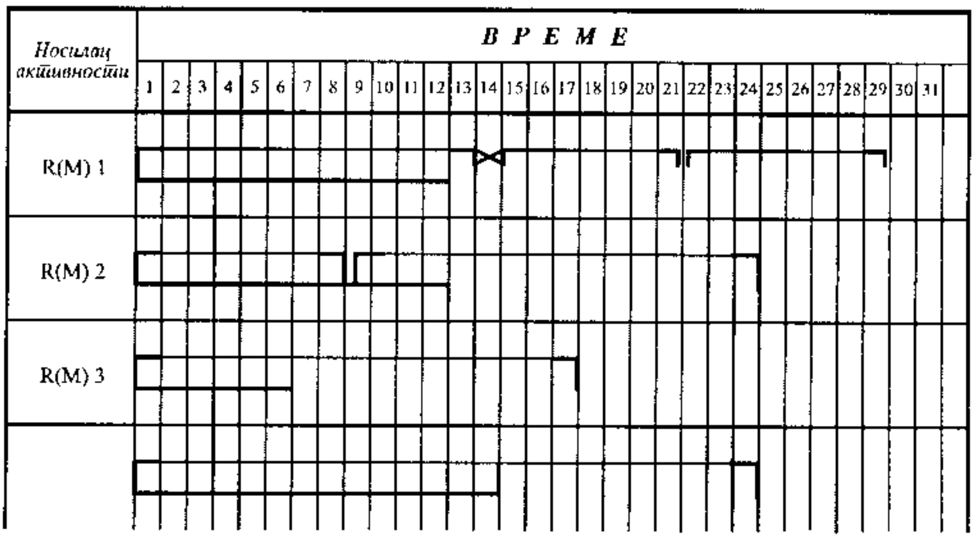
Једно од најраније развијених средстава за планирање, праћење и регулисање производње су Gantt-ове карте (Gantogrami). Њихов творац је Henry L. Gantt (1861 – 1919), један од ученика и слебденика Frederica Taylora, америчког научника и пионира научне мисли у области организацијс.

Основна идеја Gantt-ових карти је у визуелном приказивању планираних и остварених рокова за производне и друге активности, односно њихове носиоце. Разрада основне идеје на сложене услове планирања, праћења и регулисања производње донела је две врсте Gantt-ових карата.

На сл.7.4, приказана је добро позната Gantt-ова карта, која се веома много користила у оргиналном виду, а и у измењеном, за сврхе планирања и праћења извршења производних задатака.

По хоризонтали нанете су временске јединицс (дани или терминскс јединице са унапред усвојеним трајањем које у складу са потребама могу бити 2 или 3 дана, или пак, краће од једног дана). У заглављу редова су означени:

- носиоци активности (машина, радник, и сл.),
- или активности (радни налог, производни или било који други задатак).



сл.7.4. Gantt-ова карта

Без обзира да ли је у питању носилац активности или сама активност дефинисана у заглављу редова, у сваком реду изоловано убележава се помоћу посебних симбола:

- почстак обављања активности,

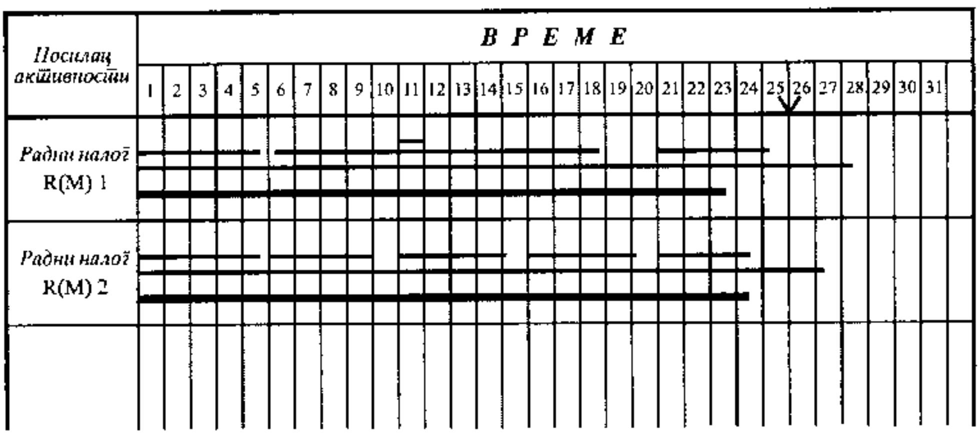
- завршетак неке активности,

- линија која повезује симболе почетка и завршетка на приказани начин означава предвиђено време трајања одређене активности,

- доња линија од симбола почетка на десно означава колико је од планираног остварено,

V - овај симбол се користи да се на временској линији дефинише садашњи тренутак, односно тренутак посматрања.

На сл.7.5. приказана је друга варијанта Gantt-ове карте где су за примену исте основне идеје коришћене линије и бројеви да би се приказало планирано и извршено у односу на неку активност. Тако број у горњем левом углу представља планирани обим у одговарајућим јединицама за дату недељу нпр., док број у горњем десном углу означава планирани укупни (кумулативни) обим од почетка за односни задатак. Танка линија представља остварени задатак, а пуна линија кумулативно извршење у односу на посматрани тренутак, који је на временској скали дефинисан на уобичајени начин.



сл.7.5. Варијанта Gantt-ове карте

Поред наведене две варијанте Gantt-ових карата, свака од њих може се користити уз незнатна прилагођавања за бројне специфичне сврхе, што се у низу случајева показује као веома корисно и представља несумњив квалитет идеје уграђене у Gantt-ове карте. Свака измена у смислу уношења нових задатака, поред предвиђених, већ уцртаних на одговарајући начин, остварује се веома једноставно, што је такође додатна предност. Ако се узме у обзир визуелна очигледност и прегледност, онда би то била употпуњена слика предности употребе Gantt-ових карата.

Међутим, у примени Gantt-ове карте испољавају се две основне слабости:

1) Узајамна зависност и условљеност појединих активности међусобно и са расположивим могућностима, што је у савременим производним процесима веома присутно, не открива се применом уобичајеног поступка за примену елемената и израду Gantt-ових карата.
2) Одступање у току извршења планираних задатака, нарочито кашњења, изискују делимичну, кад-када потпуну реконструкцију израђене карте, што је код већег броја активности додатни напор.

Посебно у условима прерађивачке производње са сложеним јединицама, које сачињавају велики број склопова, подсклопова и делова наведене слабости долазе до изражаја у много оштријем виду.