

Zadatak 1: Odrediti amplitudu A_m , ugaonu učestanost ω , učestanost f , periodu T , početnu fazu α i trenutnu vrednost u trenutku $t = 0,0025$ s prostoperiodične veličine definisane izrazom:

$$a = 100 \sin(314t + 30^\circ)$$

Rešenje

$$A_m = 100, \quad \omega = 314 \text{ rad/s}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz}, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s}, \quad \alpha = 30^\circ$$

$$a(0,0025) = 100 \sin(45 + 30) = 96,5$$

Zadatak 2: U kolu naizmenične struje postoji prostoperiodična struja efektivne vrednosti $I = 10$ A, učestanosti $f = 50$ Hz. Ako se uzme u obzir da je početna faza struje $\Psi = 0$ odrediti količinu naelektrisanja koja protekne kroz to kolo u toku prve polovine periode struje.

Rešenje

Pošto je početna faza struje $\Psi=0$, to je struja u kolu data izrazom:

$$i = I_m \sin \omega t = \sqrt{2}I \sin \omega t$$

U elementarnom intervalu vremena dt od trenutka početka posmatranja pojave kroz kolo protekne elementarna količina naelektrisanja dq data izrazom:

$$dq = i dt = \sqrt{2} \cdot I \sin \omega t \cdot dt$$

Količina naelektrisanja q koja kroz kolo protekne u toku prve poluperiode dobija se sabiranjem elementarnih količina naelektrisanja koje su protekle od $t = 0$ do $t = T/2$

$$q = \int_0^{T/2} dq = \int_0^{T/2} \sqrt{2}I \cdot \sin \omega t \cdot dt = -\frac{\sqrt{2}I}{\omega} \left(\cos \frac{\omega t}{2} - \cos 0 \right)$$

Kako je $\omega T = 2\pi$ i $\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$ to je:

$$q = \frac{2I\sqrt{2}}{\omega} = 0,054 \text{ C}$$

Zadatak 3: Na prostoperiodičan naizmenični napon $u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta)$ [V] priključen je:

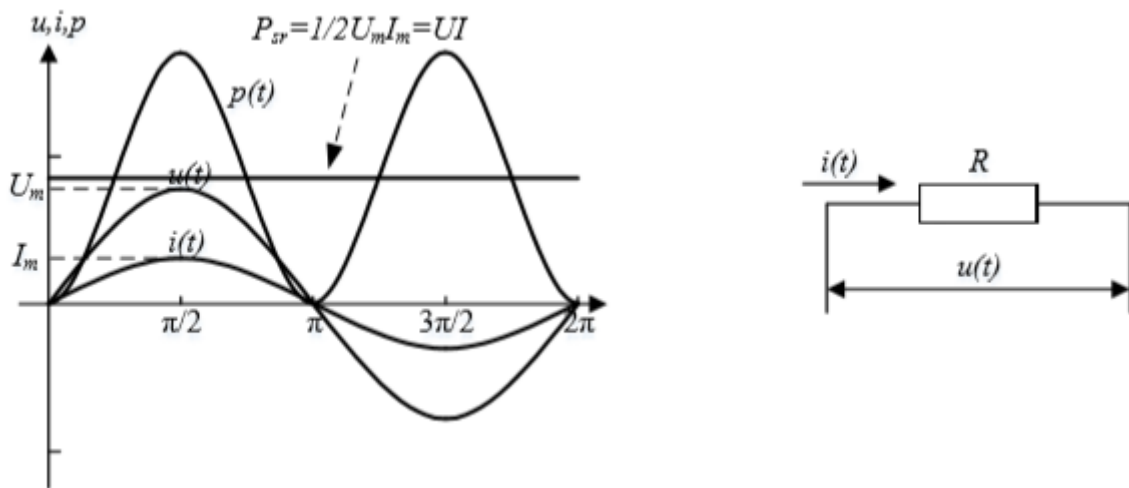
- otpornik otpornosti R ,
- kalem induktivnosti L ,
- kondenzator kapacitivnosti C .

Odrediti analitički izraz za struju za svaki od navedenih slučajeva i nacrtati grafike struja i napona i trenutne snage u funkciji vremena..

Rešenje

Dogovorno, fazni stav struje će se označavati sa Ψ , fazni stav napona sa θ , dok se razlika faznih stavova napona i struje označava sa $\varphi = \theta - \Psi$:

- slučaj kada je priključen otpornik otpornosti R (slika 3.1):



Slika 3.1

Po Omovom zakonu relacija između napona i struje kroz otpornik je:

$$i = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m \sin(\omega t + \theta)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \theta)$$

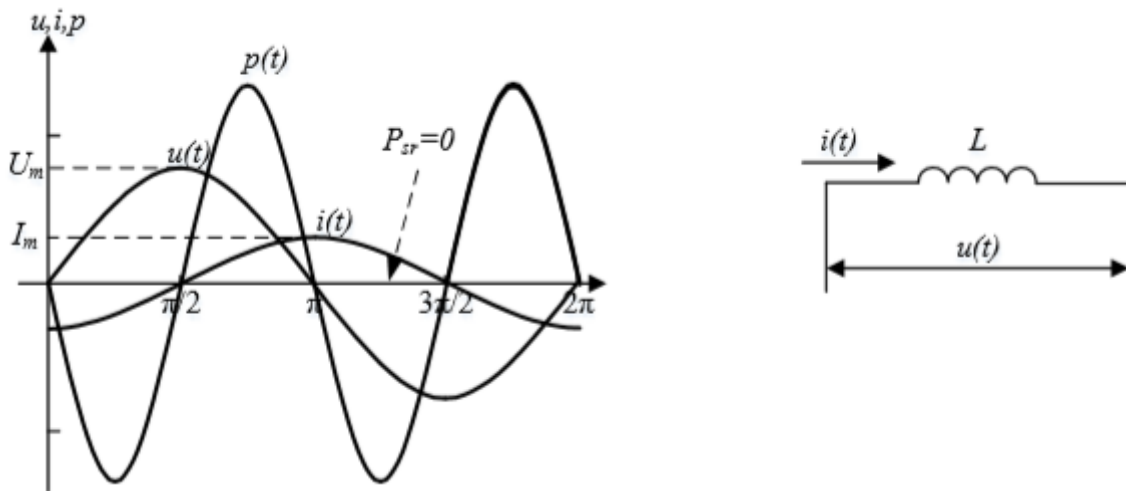
Amplituda struje: $I_m = \frac{U_m}{R}$, efektivna vrednost: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$;

Fazni stav struje: $\Psi = \theta$;

Fazna razlika (pomeraj): $\varphi = \theta - \Psi = \theta - \theta = 0$ - struja i napon kod čisto otpornog potrošača su u fazi!!!

Srednja snaga: $P_{sr} = \int p(t) dt = \frac{1}{2} U_m I_m = UI$ - gde su U i I efektivne vrednosti napona i struje.

b) slučaj kada je priključen kalem induktivnosti L (slika 3.2):



Slika 3.2

Po Faradejevom zakonu relacija između napona i struje u kalemu je:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \text{ za } I_0 = 0 \Rightarrow i = \frac{1}{L} \int u(t) dt = \frac{1}{L} \int U_m \sin(\omega t + \theta) dt = \frac{U_m}{\omega L} (-\cos(\omega t + \theta)) = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \theta - 90)$$

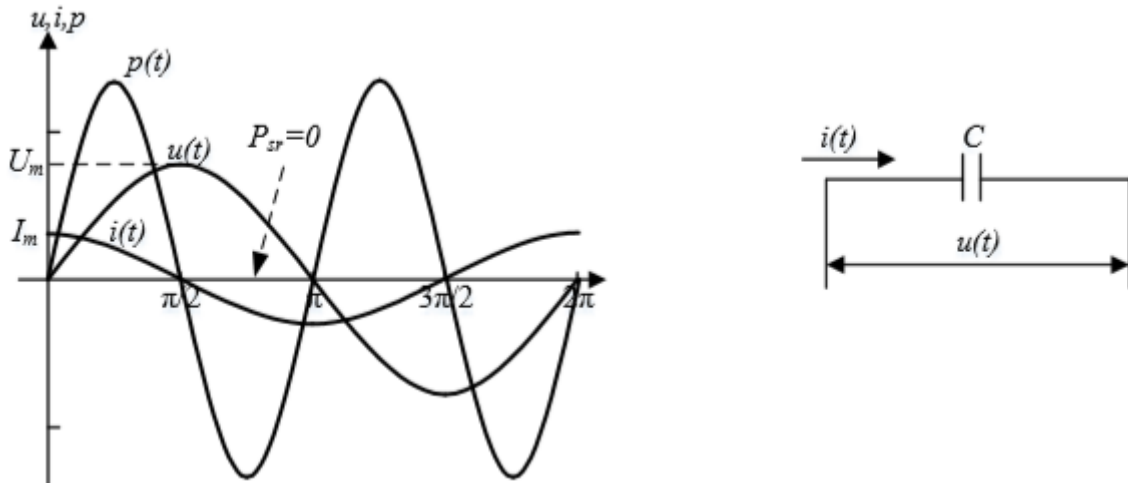
Amplituda struje: $I_m = \frac{U_m}{\omega L}$ - definicija reaktanse kalema $X_L = \omega L$

Fazni stav struje: $\Psi = \theta - 90$

Fazna razlika (pomeraj): $\varphi = \theta - \Psi = \theta - (\theta - 90) = 90$ - struja kasni za naponom kod čisto induktivnog potrošača!!!

Srednja snaga: $P_{sr} = \int p(t) dt = 0$ - koristan rad je jednak nuli, energija cirkuliše (osciluje između izvora i magnetnog polja) - potrošnja reaktivne snage.

c) slučaj kada je priključen kondenzator kapacitivnosti C (slika 3.3):



Slika 3.3

Po zakonu održanja električnih opterećenja relacija između napona i struje u kondenzatoru je:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C \frac{d(U_m \sin(\omega t + \theta))}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \theta) = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} \sin(\omega t + \theta + 90)$$

Amplituda struje: $I_m = \omega C U_m$ - definicija reaktanse kondenzatora $X_C = \frac{1}{\omega C}$

Fazni stav struje: $\Psi = \theta + 90$

Fazna razlika (pomeraj): $\varphi = \theta - \Psi = \theta - (\theta + 90) = -90^\circ$ - struja prednjači naponu za 90° kod čisto kapacitivnog potrošača!!!

Srednja snaga: $P_{sr} = \int p(t) dt = 0$ - koristan rad je jednak nuli, energija cirkuliše (osciluje između izvora i elektrostatičkog polja) - proizvodnja reaktivne snage.

Zaključak:

Impedansa potrošača se definiše kao količnik efektivne vrednosti napona i struje:

$$Z = \frac{U}{I} [\Omega]$$

Trenutna snaga je jednaka proizvodu trenutnih vrednosti napona i struja:

$$\begin{aligned} p(t) &= U_m \sin(\omega t + \theta) \cdot I_m \sin(\omega t + \psi) = \frac{1}{2} U_m I_m (\cos(\theta - \psi) + \sin(2\omega t + \theta + \psi)) \\ &= UI (\cos \varphi + \sin 2\omega t + \theta + \psi) [\text{W}] \end{aligned}$$

Aktivna snaga brojno je jednaka srednoj vrednosti trenutne snage:

$$P_{sr} = \int p(t) dt \Rightarrow P = UI \cos \varphi [\text{W}]$$

Reaktivna snaga predstavlja meru oscilovanja (naizmjenične razmene) energije između izvora i potrošača

$$Q = UI \sin \varphi [\text{VAr}]$$

Prividna snaga definiše se kao:

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} [\text{VA}]$$

Otporni potrošač – R

$$Z = \frac{U}{I} = R$$

$$\varphi = 0$$

$$P = UI$$

$$Q = 0$$

Induktivni potrošač – L

$$Z = \frac{U}{I} = \omega L$$

$$\varphi = 90^\circ$$

$$P = 0$$

$$Q = UI$$

Kapacitivni potrošač – C

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$$

$$\varphi = -90^\circ$$

$$P = 0$$

$$Q = -UI$$

Zadatak 4: Na izvor naizmjeničnog napona efektivne vrednosti $U = 220$ V, učestanosti $f = 50$ Hz priključen je kalem induktivnosti $L = 0,1$ H. Odrediti maksimalnu energiju koja u jednom trenutku može biti sadržana u magnetnom polju tog kalema.

Rešenje

Maksimalna magnetska energija je:

$$W_{M \max} = \frac{1}{2} LI_m^2$$

gde je I_m amplituda, a I efektivna vrednost struje kalema. Kako je: $I = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L}$ i $\omega = 2\pi f$ to je:

$$W_{M \max} = \frac{U^2}{\omega^2 L} = \frac{U^2}{(2\pi f)^2 L} = \frac{220^2}{(2 \cdot \pi \cdot 50)^2 \cdot 0,1} = 4,9 \text{ J}$$

Zadatak 5: Na izvor naizmjeničnog napona efektivne vrednosti $U = 220$ V, učestanosti $f = 50$ Hz priključen je kondenzator kapaciteta $C = 1$ μF . Odrediti maksimalnu energiju koja u jednom trenutku može biti sadržana u navedenom kondenzatoru.

Rešenje

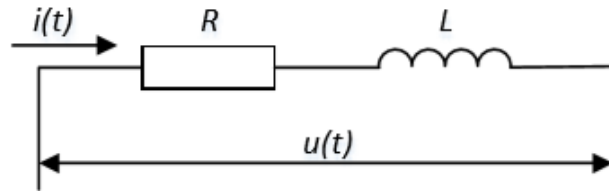
Maksimalna energija sadržana u kondenzatoru je:

$$W_{M \max} = \frac{1}{2} CU_m^2 = CU^2$$

gde je U_m amplituda, a U efektivna vrednost napona kondenzatora. U datom slučaju je:

$$W_{M \max} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 220^2 = 0,0484 \text{ J}$$

Zadatak 6: Otpornik otpornosti $R = 400 \Omega$ i kalem inuktivnosti $L = 1,6 \text{ H}$ vezani su na red i priključeni na naizmenični napon efektivne vrednosti $U = 220 \text{ V}$, učestanosti $f = 50 \text{ Hz}$ (slika 6.1). Odrediti efektivnu vrednost struje, faktor snage i aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu.



Slika 6.1

Rešenje

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 1,6 = 502,65 \Omega,$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{400^2 + 502,65^2} = 642,38 \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{642,38} = 0,34 \text{ A}$$

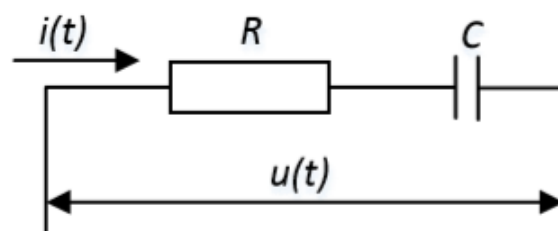
$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{400}{642,38} = 0,623$$

$$P = UI \cos \varphi = 220 \cdot 0,34 \cdot 0,623 = 46,60 \text{ W}$$

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \cdot 0,34 \cdot 0,782 = 58,49 \text{ VAr}$$

$$S = UI = 220 \cdot 0,34 = 74,80 \text{ VA}$$

Zadatak 7: Otpornik otpornosti $R = 800 \Omega$ i kondenzator kapaciteta $C = 1 \mu\text{F}$ vezani su na red i priključeni na naizmenični napon efektivne vrednosti $U = 220 \text{ V}$, učestanosti $f = 50 \text{ Hz}$ (slika 7.1). Odrediti efektivnu vrednost struje, faktor snage i aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu.



Slika 7.1

Rešenje

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 3183,10 \Omega,$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{800^2 + 3183,10^2} = 3282,10 \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{3282,10} = 0,067 \text{ A}$$

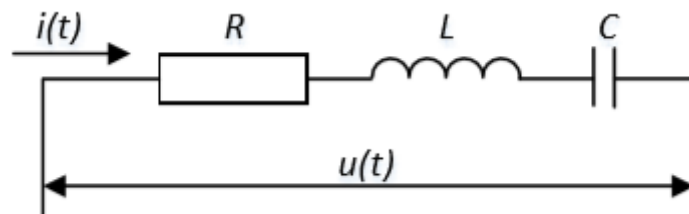
$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{800}{3282,10} = 0,24$$

$$P = UI \cos \varphi = 220 \cdot 0,067 \cdot 0,24 = 3,54 \text{ W}$$

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \cdot 0,067 \cdot 0,97 = 14,30 \text{ VAr}$$

$$S = UI = 220 \cdot 0,067 = 14,74 \text{ VA}$$

Zadatak 8: Otpornik otpornosti $R = 10 \Omega$, kalem induktivnosti $L = 0,1 \text{ H}$ i kondenzator kapaciteta $C = 150 \mu\text{F}$ vezani su na red i priključeni na naizmenični napon efektivne vrednosti $U = 220 \text{ V}$, učestanosti $f = 50 \text{ Hz}$ i početne faze $\theta = 30^\circ$ (slika 8.1). Odrediti efektivnu vrednost struje, faktor snage, izraz za trenutnu vrednost struje i efektivne vrednosti napona na svakom od elemenata kola. Nacrtati vektorski dijagram napona i struja.



Slika 8.1

Rešenje

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0,1 = 31,42 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 150 \cdot 10^{-6}} = 21,22 \Omega,$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L^2 - X_C^2)} = \sqrt{10^2 + (31,42 - 21,22)^2} = 14,28 \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{14,28} = 15,41 \text{ A}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{10}{14,28} = 0,70$$

Analitički izraz za trenutnu vrednost struje je: $i = I_m \sin(\omega t + \psi) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \theta - \varphi)$
odnosno pošto je $\varphi = \arccos 0,7 = 45^\circ$ sledi da je $i = \sqrt{2}I \sin(314t - 15)$ A

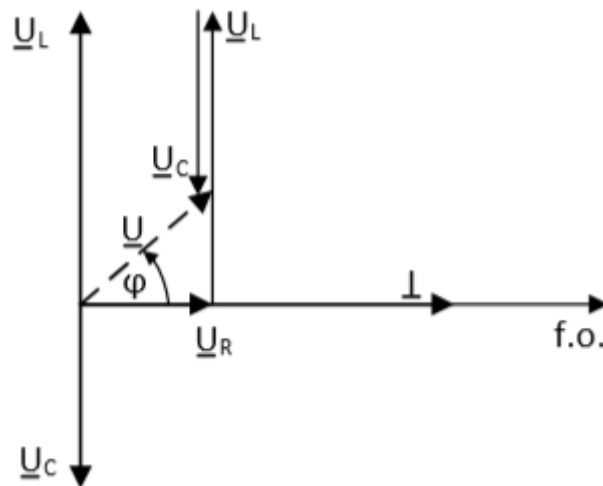
Efektivne vrednosti napona na pojedinim elementima kola iznose:

$$U_R = RI = 10 \cdot 15,41 = 154,1 \text{ V}$$

$$U_L = X_L I = 31,42 \cdot 15,41 = 484,18 \text{ V}$$

$$U_C = X_C I = 21,22 \cdot 15,41 = 327 \text{ V}$$

Odgovarajući vektorski dijagram je prikazan na slici 8.2:



Slika 8.2

Zadatak 9: Kompleksni izrazi napona i struje u kolu naizmenične struje imaju sledeći oblik: $U = (80+j60)$ V i $I = (24-j7)$ A. Odrediti kompleksnu impedansu, struju i prividnu snagu.

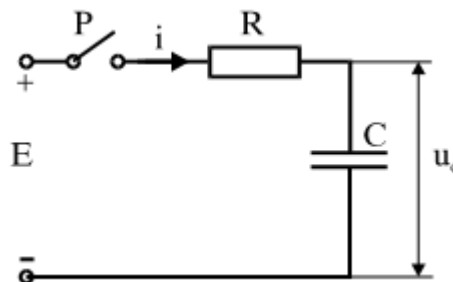
Rešenje

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{80 + j60}{24 - j7} = (2,4 + j3,2) \Omega$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \frac{80 + j60}{24 - j7} = (80 + j60)(24 + j7) \Omega$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = 0,6$$

Zadatak 10: Kondenzator kapaciteta $C = 100 \mu\text{F}$ redno vezan sa otpornikom $R = 1 \text{ k}\Omega$ priključuje se na izvor ems $E = 120 \text{ V}$ preko prekidača P (slika 10.1). Odrediti rad izvora ems u intervalu od uključivanja kola do trenutka $t_1 = 0,2 \text{ s}$, kao i napon na kondenzatoru u tom trenutku. Kondenzator pre priključivanja nije naelektrisan.



Slika 10.1

Rešenje

Kada se kolo priključi na izvor zatvaranjem prekidača P počinje punjenje kondenzatora C , koji je pre toga bio neopterećen. Struja kroz kolo je $i = dq/dt$, a napon na krajevima kondenzatora je $u_c = \frac{q}{C}$. Jednačina naponske ravnoteže za ovo kolo je:

$$E - R \cdot i - u_c = 0$$

a posle zamene:

$$E - R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine je pri $q = 0$ za $t = 0$:

$$q(t) = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

a napon na krajevima kondenzatora se menja prema zakonu:

$$u_C = \frac{q}{C} = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Za $t = 0,2$ s i $RC = 1000 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0,1$ s vrednost napona na kondenzatoru je:

$$u_C(t = 0,2) = 120 \cdot \left(1 - e^{-\frac{0,2}{0,1}} \right) = U_1 = 105,76 \text{ V}$$

Struja kroz kolo se menja prema:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ gde je } \tau = RC = 0,1 \text{ s}$$

Ako se jednačina naponske ravnoteže za kolo:

$$E = R \cdot i + u_C = R \cdot i + \frac{q}{C}$$

pomnoži sa $dq = idt$ dobije se:

$$E \cdot i \cdot dt = R \cdot i^2 dt + \frac{q}{C} dq$$

a posle integraljenja leve i desne strane u intervalu 0 do t dobija se energetski bilans u kolu u tom intervalu.

$$\int_0^{t_1} E \cdot i dt = \int_0^{t_1} R \cdot i^2 dt + \int_0^Q \frac{q}{C} dq = A_r + W_c$$

Član na levoj strani je ukupan rad izvora ems E od trenutka zatvaranja prekidača P do trenutka t_1 .

Toplotna energija koja se u tom intervalu oslobodi na otporniku R određuje se prvim članom sa desne strane jednačine:

$$A_r = \int_0^{t_1} R \cdot i^2 dt = \int_0^{t_1} R \cdot \left(\frac{E}{R}\right)^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} \left(-\frac{RC}{2}\right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{t_1} = \frac{E^2 C}{2} (-e^{-4} + e^0) = 0,7 \text{ J}$$

Energija kondenzatora u trenutku t posle zatvaranja prekidača se izračunava drugim članom jednačine:

$$W_c = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U_1^2 = 0,5 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 105,76^2 = 0,56 \text{ J}$$

a rad izvora elektromotorne sile na osnovu gornje jednačine je:

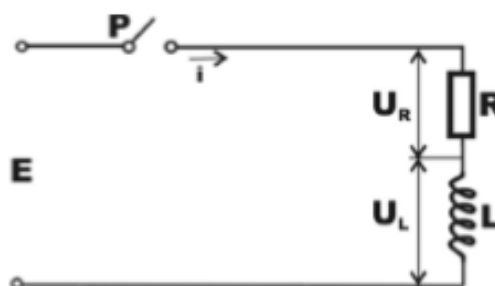
$$A_E = A_r + W_c = 0,7 + 0,56 = 1,26 \text{ J}$$

Rad izvora ems se može naći i neposredno integraljenjem leve strane jednačine posle zamene izraza za struju kroz kolo u intervalu $t = 0$ do $t = t_1$:

$$A_E = \int_0^{t_1} E \cdot i dt = \int_0^{t_1} E \cdot \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt = E^2 \frac{1}{R} (-RC) e^{-\frac{t}{RC}} \Big|_0^{t_1} = E^2 C \left(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}}\right) = 1,25 \text{ J}$$

što je približno kao i u prvom slučaju, a razlika se javlja pri izračunavanju.

Zadatak 11: Otpornost $R = 20 \Omega$ i induktivnost $L = 0,1 \text{ H}$ priključuju se na izvor ems $E = 24 \text{ V}$ preko prekidača (slika 11.1). Odrediti rad izvora u intervalu od zatvaranja prekidača do trenutka $t = 15 \text{ ms}$ kao i jačinu struje u tom trenutku.



Slika 11.1

Rešenje

Posle zatvaranja prekidača P u kolu se uspostavlja struja $i(t)$. Jednačina naponske ravnoteže za kolo pri vrednosti struje $i(t) = i$ je:

$$E = R \cdot i + L \frac{di}{dt} = u_R + u_L$$

Rešavanjem ove diferencijalne jednačine za početne uslove $t = 0$, $i(t) = i(0) = 0$ je:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Vremenska konstanta kola je $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0,1}{20} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 5 \text{ ms}$.

U trenutku $t = 25 \text{ ms}$ posle zatvaranja prekidača P jačina struje kroz kolo je:

$$i(t_1) = \frac{24}{20} \left(1 - e^{-\frac{15}{\tau}} \right) = 1,2(1 - 0,05) = 1,14 \text{ A}$$

Kada se prva jednačina pomnoži sa idt dobija se:

$$E \cdot idt = R \cdot i^2 dt + L \cdot idt$$

Ova jednačina iskazuje zakon o održanju energije u kolu u vremenskom intervalu dt . Ako se integrali leva i desna strana ove jednačine u intervalu od $t = 0$ do $t = t_1$, odnosno u granicama za jačinu struje od $i = 0$ do $i = i(t_1)$, dobija se energetski bilans u kolu u tom intervalu:

$$\int_0^{t_1} E \cdot idt = \int_0^{t_1} R \cdot i^2 dt + \int_0^{I_{t_1}} L \cdot idt = A_r + W_m$$

Član sa leve strane predstavlja rad izvora ems u tom intervalu:

$$\int_0^{t_1} E \cdot idt = \frac{E^2}{R} \left(t + \frac{L}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \Big|_0^{t_1} = 0,295 \text{ J}$$

Drugi član sa desne strane predstavlja energiju magnetnog polja:

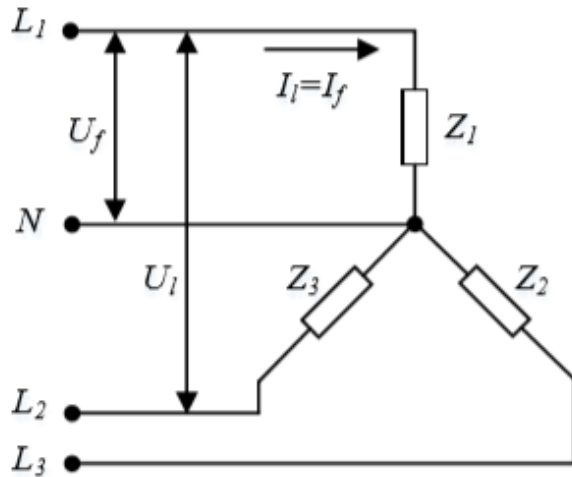
$$W_m = \int_0^{i(t_1)} L i dt = \frac{1}{2} L \cdot i_{t_1}^2 = 0,5 \cdot 0,1 \cdot 1,14^2 = 0,065 \text{ J}$$

Prvi član sa desne strane predstavlja energiju koja se u vidu toplote oslobodi na otporniku R . Prema zakonu o održanju energije iznosi:

$$A_r = A_E - W_m = 0,295 - 0,065 = 0,23 \text{ J}$$

Zadatak 12: Odrediti napon, struju i snagu trofaznih potrošača vezanih u zvezdu (slika 12.1) i trougao (slika 12.2).

Rešenje



Slika 12.1

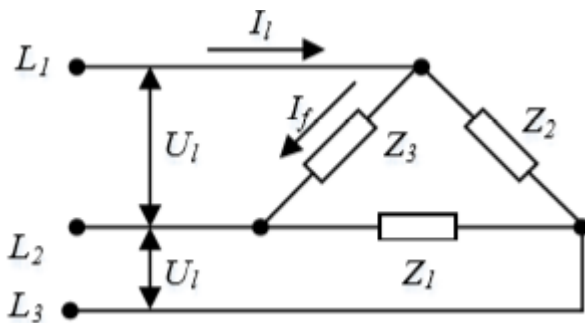
$$U_l = \sqrt{3}U_f$$

$$I_l = I_f$$

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi = 3U_f I_f \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi = 3U_f I_f \sin \varphi$$

$$S = \sqrt{3}U_l I_l = 3U_f I_f$$



Slika 12.2

$$U_l = U_f$$

$$I_l = \sqrt{3}I_f$$

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi = 3U_f I_f \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi = 3U_f I_f \sin \varphi$$

$$S = \sqrt{3}U_l I_l = 3U_f I_f$$