

**1. Zadatak:** Motor jednosmerne struje sa rednom pobudom ima nominalne podatke: 15 kW, 100 rad/s, 400 V, 40 A,  $R_a = 0,28 \Omega$ ,  $R_p = 0,12 \Omega$ .

- Odrediti nominalni moment i bilans snaga.
- Motor se optereti radnom mašinom konstantnog momenta  $m_m = 80 Nm$ . Odrediti struju i ugaonu brzinu obrtanja ako je napon nominalan, kao i stepen iskorišćenja.
- Motor se optereti radnom mašinom koja ima linearnu zavisnost momenta od ugaone brzine obrtanja, a pri  $\omega_2 = 100 \text{ rad/s}$  zahteva  $M_2 = 120 Nm$ . Koliki napon napajanja je potreban da se pogon obrće sa  $\omega_3 = 90 \text{ rad/s}$ ? Koliki je sad stepen stepen iskorišćenja?

### REŠENJE:

Sistem jednačina kojima se opisuje rad rednih motora u stacionarnom stanju je:

$$U = (R_a + R_p) \cdot I_a + E \quad (1.1)$$

$$U = U_a + U_p \quad (1.2)$$

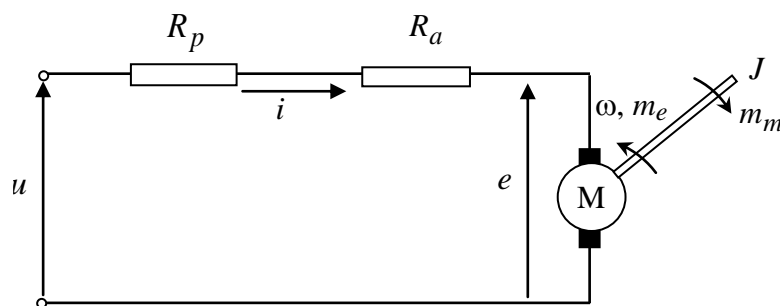
$$I = I_a = I_p \quad (1.3)$$

$$M_e = m_m \quad (1.4)$$

$$E = \Phi \cdot \omega = L_{ap} \cdot I_p \cdot \omega \quad (1.5)$$

$$M_e = \Phi \cdot i_a = L_{ap} \cdot I_p \cdot I_a \quad (1.6)$$

Ekvivalentna šema ovog motora data je na slici 1.1. Pobudni namotaj (nekoliko zavojaka debele bakarne žice) vezan je na red sa namotajem rotora, pa su te dve struje identične, jed. (1.3).



Slika 10.1: Ekvivalentna šema motora jednosmerne struje sa rednom pobudom.

U nominalnom režimu rada gornje jednačine imaju oblik:

$$U_n = (R_a + R_p) \cdot I_n + E_n \quad (1.7)$$

$$U_n = U_{an} = U_{pn} \quad (1.8)$$

$$I_n = I_{an} = I_{pn} \quad (1.9)$$

$$M_{en} = m_m \quad (1.10)$$

$$E_n = \Phi_n \cdot \omega_n \quad (1.11)$$

$$M_{en} = \Phi_n \cdot I_n \quad (1.12)$$

Uvažavajući izraze (1.6) i (1.9), izraz za razvijeni moment u nominalnom režimu će biti:

$$M_{en} = L_{ap} \cdot I_n \cdot I_n = L_{ap} \cdot I_n^2 \quad (1.13)$$

Dakle, razvijeni moment rednog motora je funkcija kvadrata struje,  $M_e = L_{ap} I^2$ .

### a.) Nominalni radni režim

Nominalni izlazni moment je:

$$M_n = \frac{P_n}{\omega_n} = \frac{15000}{100} = 150 \text{ Nm} \quad (1.14)$$

Elektromotorna sila u nominalnom režimu rada određuje se iz jednačine (1.7):

$$E_n = U_n - (R_a + R_p) \cdot I_n = 400 - (0,28 + 0,12) \cdot 40 = 384 \text{ V} \quad (1.15)$$

Pobudni fluks se nalazi po jednačini (1.11):

$$\Phi_n = \frac{E_n}{\omega_n} = \frac{384}{100} = 3,84 \text{ Wb} \quad (1.16)$$

Međuintektivnost je:

$$L_{ap} = \frac{\Phi_n}{I_n} = \frac{3,84}{40} = 0,096 \text{ H} \quad (1.17)$$

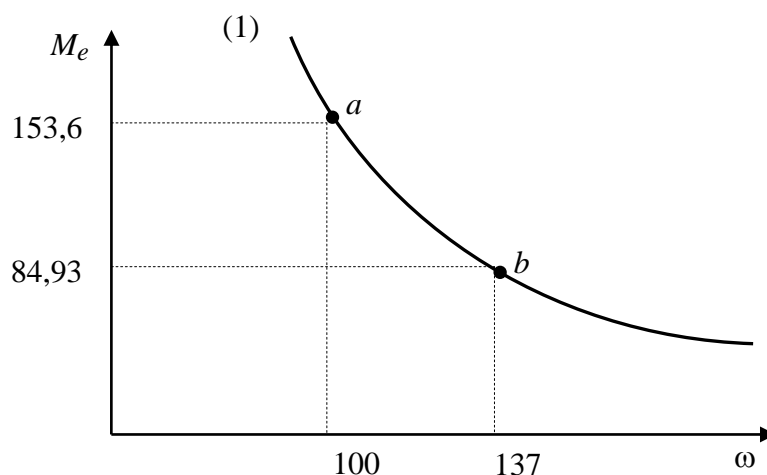
pa je nominalni elektromagnetni moment:

$$M_{en} = \Phi_n \cdot I_n = 3,84 \cdot 40 = 153,6 \text{ Nm} \quad (1.18)$$

Gubitak momenta (na trenje i ventilaciju, kao i na gubitke u gvožđu) je:

$$\Delta M_n = M_{en} - M_n = 153,6 - 150 = 3,6 \text{ Nm} \quad (1.19)$$

Karakteristika razvijenog momenta  $M_e$  ( $\omega$ ) je na slikama 1.2 i 1.3 obeležena sa (1). Za karakteristiku ovakvog oblika se kaže da je meka, jer za relativno malu promenu momenta dolazi do velike promene brzine, što će se videti kasnije u ovom zadatku. Nominalna radna tačka je u tački *a*.



Slika 1.2: Karakteristika razvijenog momenta motora jednosmerne struje sa rednom pobudom.

### Bilans snaga u nominalnom režimu:

$$\text{Ulazna snaga je:} \quad P_{en} = U_n I_n = 400 \cdot 40 = 16 \text{ kW} \quad (1.20)$$

$$\text{Gubici u bakru:} \quad P_{Cu} = (R_p + R_a) I^2 = 0,4 \cdot 40^2 = 640 \text{ W} \quad (1.21)$$

Zbir gubitaka u gvožđu i mehaničkih gubitaka na trenje i ventilaciju:

$$P_{Fe} + P_{gm} = P_{en} - P_{Cu} - P_n = 16 - 0,64 - 15 = 0,36 \text{ kW} \quad (1.22)$$

$$\text{odnosno:} \quad P_{Fe} + P_{gm} = \Delta M_n \omega_n = 3,6 \cdot 100 = 360 \text{ W} \quad (1.23)$$

Stepen iskorišćenja je odnos izlazne i ulazne snage:

$$\eta_n = \frac{P_{izlaz}}{P_{ulaz}} = \frac{P_n}{P_{en}} = \frac{15}{16} = 0,9375 = 93,75 \% \quad (1.24)$$

### **b.) Manje opterećenje**

Motor je opterećen radnom mašinom momenta  $m_m = 80 \text{ Nm}$ . U ovom novom stacionarnom stanju, moment koji motor razvija na kraju vratila  $M_1$  je brojno jednak momentu radne mašine, a elektromagnetni moment  $M_{e1}$  je veći, radi pokrivanja gubitaka  $\Delta M_1$ . Usvajamo, za početak, da je moment gubitaka nepromenjen, pa je procena razvijenog elektromagnetnog momenta:

$$M_{e1} = m_m + \Delta M_1 = 80 + 3,6 = 83,6 \text{ Nm} \quad (1.25)$$

Struja u ovom režimu rada je:

$$I_1 = \sqrt{\frac{M_{e1}}{L_{ap}}} = \sqrt{\frac{83,6}{0,096}} = 29,51 \text{ A} \quad (1.26)$$

Napon napajanja motora je ostao nominalan, pa će elektromotorna sila biti:

$$E_1 = U_n - (R_a + R_p) \cdot I_1 = 400 - (0,28 + 0,12) \cdot 29,51 = 388,196 \text{ V} \quad (1.27)$$

Zbog nove struje, pobudni fluks u ovom režimu rada sad je:

$$\Phi_1 = L_{ap} \cdot I_1 = 0,096 \cdot 29,51 = 2,833 \text{ Wb} \quad (1.28)$$

pa će brzina obrtanja u ovom stacionarnom stanju biti:

$$\omega_1 = \frac{E_1}{\Phi_1} = \frac{388,196}{2,833} = 137,03 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (1.29)$$

U zadatku se može uvažiti promena momenta usled gubitaka u gvožđu i gubitaka na ventilaciju (brzina se značajno promenila usled meke mehaničke karakteristike), pa primeniti iterativni postupak. Nakon jedne iteracije, dobijaju se sledeće vrednosti:

$$M_{e1} = m_m + \Delta M_1 = 80 + 4,93 = 84,93 \text{ Nm} \quad ; \quad I_1 = 29,744 \text{ A} \quad ; \quad \omega_1 = 137 \text{ rad/s}$$

Radna tačka ovog režima rada je u tački **b**, koja je i dalje na krivoj (1), slika 1.2.

**ZAKLJUČAK:** Sa smanjenjem opterećenja, dolazi do smanjenja struje, a time i fluksa, pa mašina teži da poveća brzinu. Isto važi i za obrnut slučaj - sa povećanjem momenta opterećenja, dolazi do povećanja struje pobude tj. povećanja pobudnog fluksa, pa mašina teži da smanji brzinu. Dakle, moment je visok pri nižim brzinama. Zbog ove osobine, jasno uočljive na slici 1.2, redni motor se uglavnom koristi u električnoj vuči.

U ovom radnom režimu, ulazne i izlazne snage su:

$$P_{e1} = U_1 I_1 = 400 \cdot 29,744 = 11,898 \text{ kW} \quad (1.30)$$

$$P_1 = M_1 \omega_1 = 80 \cdot 137 = 10,96 \text{ kW} \quad (1.31)$$

Pa je stepen iskorišćenja:

$$\eta_1 = \frac{P_1}{P_{e1}} = \frac{10,96}{11,898} = 0,9212 = 92,12 \% \quad (1.32)$$

### c.) Druga radna mašina

Motor sada pogoni radnu mašinu čiji je moment linearno zavisao od brzine:

$$m_m = k \cdot \omega \quad (1.33)$$

Uvrštavanjem brojnih vrednosti jednog poznatog stacionarnog stanja, dobija se vrednost koeficijenta  $k$ :

$$k = \frac{m_{m2}}{\omega_2} = \frac{120}{100} = 1,2 \frac{\text{Nm}}{\text{rad/s}} \quad (1.34)$$

Za brzinu obrtanja od  $\omega_3 = 90 \text{ rad/s}$ , moment opterećenja će biti:

$$m_{m3} = k \cdot \omega_3 = 1,2 \cdot 90 = 108 \text{ Nm} \quad (1.35)$$

Moment gubitaka pri ovoj brzini će biti:

$$\Delta M_3 = \Delta M_n \frac{\omega_3}{\omega_n} = 3,6 \frac{90}{100} = 3,24 \text{ Nm} \quad (1.36)$$

Ovo je stacionarno stanje u kome moment motora na kraju vratila  $M_3$  mora biti jednak otpornom momentu  $M_{m3}$ , pa se struja motora u ovom radnom režimu izračunava kao:

$$I_3 = \sqrt{\frac{M_{e3}}{L_{ap}}} = \sqrt{\frac{108 + 3,24}{0,096}} = 34,0404 \text{ A} \quad (1.37)$$

Vrednost nove elektromotorne sile nalazi se kao:

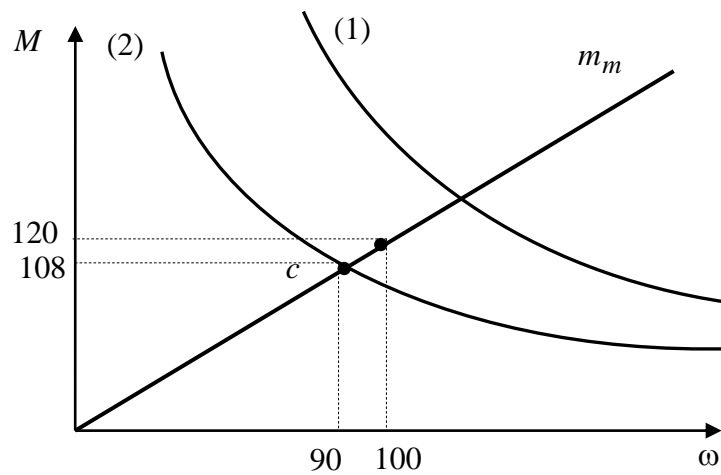
$$E_3 = \Phi_3 \cdot \omega_3 = L_{ap} \cdot I_3 \cdot \omega_3 = 0,096 \cdot 34,0404 \cdot 90 = 294,1 \text{ V} \quad (1.38)$$

Te se dobija neophodan napon od:

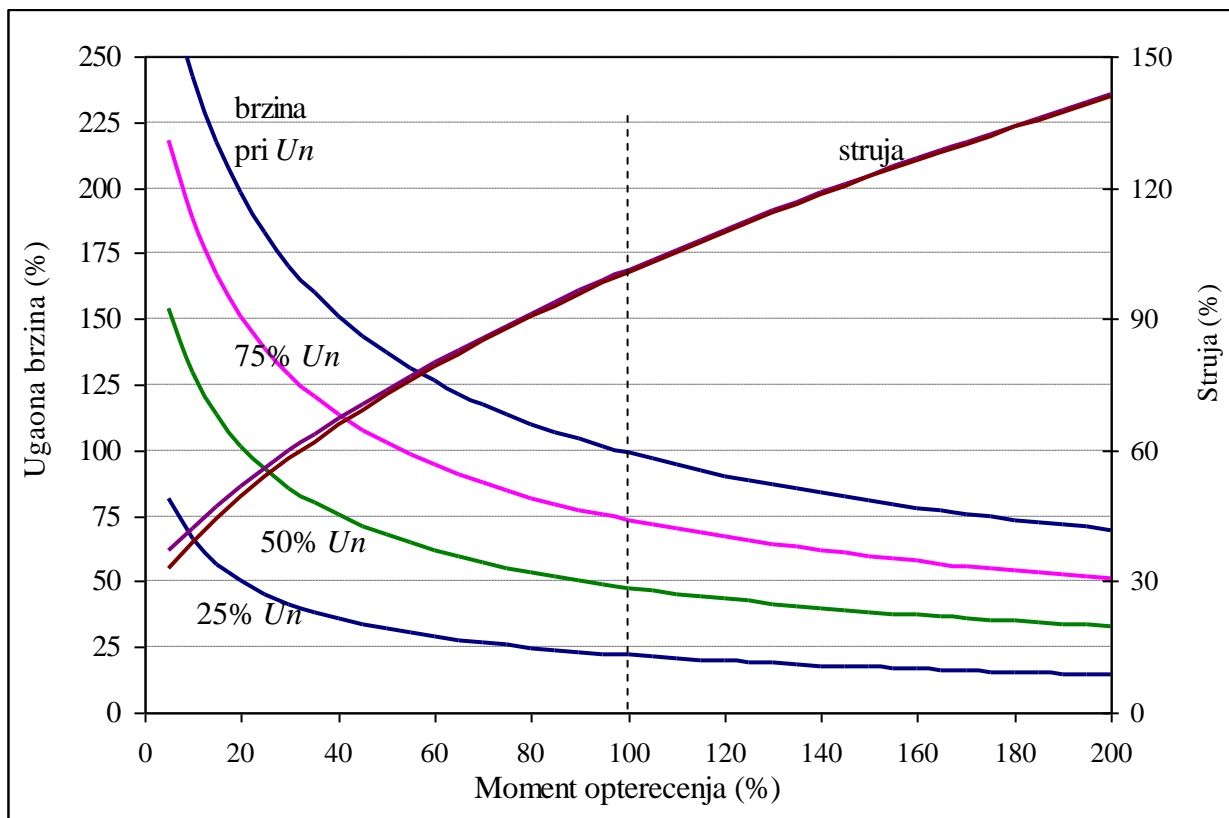
$$U_3 = (R_a + R_p) \cdot I_3 + E_3 = (0,28 + 0,12) \cdot 34,04 + 294,1 = 307,72 \text{ V} \quad (1.39)$$

Dakle, da bi postigli željenu brzinu sa datom radnom mašinom, napon napajanja treba smanjiti sa nominalne vrednosti od 400 V na radnu vrednost od 307,7 V. Mehanička karakteristika ovog režima rada je na slici 1.3 obeležena sa (2), a radna tačka je u tački  $c$ .

Detaljniji dijagram eksploatacije ovog motora (bez obzira na radnu mašinu) dat je na slici 1.4., gde su prikazani ugaona brzina obrtanja (za nekoliko napona napajanja) i struja (pri  $U_n$  i pri 25%  $U_n$ ) kao funkcije momenta opterećenja. Vidi se da je karakteristika brzine nelinearna i meka, sa visokim vrednostima pri vrlo malom opterećenju. Struja nelinearno raste sa opterećenjem, kako se očekuje po jed. (1.13) ali sa izvesnim odstupanjem pri malom opterećenju. Kao i u zadatku, uzeto je da se  $\Delta M$  menja linearno sa brzinom, pa pri malim opterećenjima  $\Delta M$  postaje značajno u odnosu na opterećenje, te struja ne opada po očekivanom zakonu (1.13), već je nešto viša.



Slika 1.3: Mehanička karakteristika motora jednosmerne struje sa rednom pobudom i moment radne mašine  $m_m$



Slika 1.4: Ugaona brzina (za pun i za snižene napone napajanja) i struja motora jednosmerne struje sa rednom pobudom (iz ovog zadatka), u funkciji opterećenja.

**ZAKLJUČAK:** Iz ovog dela zadatka se vidi da se snižavanje brzine obrtanja rednog motora postiže smanjenjem napona napajanja. Pošto je mehanička karakteristika motora nelinearna (nije prava nego kriva), promena napona napajanja i rezultatna brzina motora nisu u direktnoj srazmeri. Treba se podsetiti da i priroda promene momenta radne mašine sa brzinom ima značajan uticaj.

Konačno, pri smanjenom naponu, bilans snaga i stepen korisnog dejstva su sledeći:

$$P_{e3} = U_3 I_3 = 307,72 \cdot 34,04 = 10,475 \text{ kW} \quad (1.40)$$

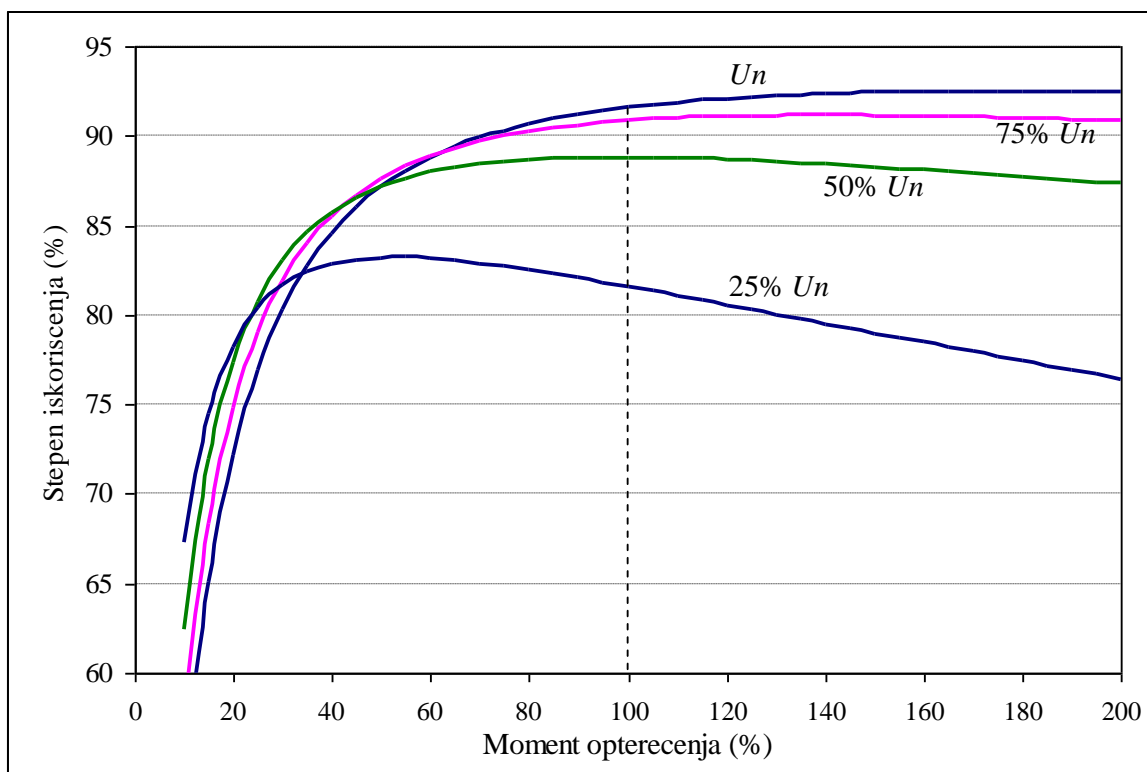
$$P_3 = M_3 \omega_3 = 108 \cdot 90 = 9,63 \text{ kW} \quad (1.41)$$

$$\eta = \frac{P_3}{P_{e3}} = \frac{9,63}{10,475} = 0,9212 = 92,12 \% \quad (1.42)$$

**DISKUSIJA:** Stepen korisnog dejstva ovog motora u razmatranim radnim režimima je prilično visok, tj. blizak nominalnom. U ovim režimima motor razvija 73 % odnosno 64 % nominalne snage, pa je visok stepen iskorišćenja povoljna činjenica za eksploataciju.

Na slici 1.5. prikazana je promena stepena iskorišćenja razmatranog motora kao funkcija momenta opterećenja, pri 4 nivoa napona napajanja. Interesantno je primetiti da se maksimalni stepen iskorišćenja  $\eta_{max}$  ima tek na oko 180% i oko 140% opterećenja pri 100% odnosno 75% napona napajanja, respektivno. Isto tako,  $\eta_{max}$ , iako niži po apsolutnom iznosu, nastaje na oko 55% opterećenja pri 25% napona napajanja.

Pošto kod jednosmernih motora sa rednom pobudom razvijeni obrtni moment zavisi od kvadrata struje, jednačina (1.13), razmatranja iz zadatka 2 se ne mogu primeniti njih. Postupkom kao u zadatku 2, pokazuje se da će maksimalni stepen iskorišćenja rednog motora nastati kada je  $I = 2A/B$ . Treba primetiti da iznos gubitaka A ne zavisi od struje opterećenja, ali zavisi od brzine, tj. povezan je sa naponom napajanja.



Slika 1.5: Stepen korisnog dejstva motora jednosmerne struje sa rednom pobudom (iz ovog zadatka) , za pun i snižene napone napajanja.

**2. Zadatak:** Motor jednosmerne struje sa nezavisnom pobudom ima nominalne podatke: napon rotora  $U_n = 230 \text{ V}$ , struja rotora  $I_n = 100 \text{ A}$ , omski otpor rotora  $R_a = 0,2 \Omega$ , brzina obrtanja  $n_n = 1200 \text{ o/min}$ , struja pobude  $I_{pn} = 10 \text{ A}$ . Gubici u gvožđu i mehanički gubici se zanemaruju. Motor pogoni radnu mašinu koja ima linearnu karakteristiku momenta oblika  $M_{opt} = kn$ , gde je konstanta zavisnosti određena eksperimentalno i iznosi  $k = 0,12 \text{ Nm/min}$ .

- a.) Šta treba uraditi da bi se pogon obrtao sa  $n = 1000 \text{ o/min}$ ? Koliku struju motor vuče u tom slučaju?
- b.) Šta treba uraditi da bi se pogon obrtao sa  $n = 1400 \text{ o/min}$ , u slučaju da se vrednost rotorskog napona ne može povećavati iznad nominalne vrednosti? Koliku struju motor vuče u tom slučaju?

### REŠENJE:

a.) Elektromotorna sila u nominalnom režimu rada iznosi:

$$E_n = U_n - R_a I_n = 230 - 0,2 \cdot 100 = 210 \text{ V} \quad (2.1)$$

Prema tome moment u nominalnom režimu iznosi:

$$M_n = \frac{P_n}{\omega_n} = \frac{E_n I_n}{\frac{2\pi}{60} \cdot n_n} = \frac{210 \cdot 100}{\frac{2\pi}{60} \cdot 1200} = 167,11 \text{ Nm} \quad (2.2)$$

Moment opterećenja u traženoj radnoj tački je:

$$M_{opt} = kn_1 = 0,12 \cdot 1000 = 120 \text{ Nm} \quad (2.3)$$

Imajući u vidu da je zahtevana brzina manja u odnosu na nominalnu i da se motor tada eksploatiše sa nominalnim fluksom (nominalna sstruja pobude), vrednost struje rotora motora se može naći iz sledeće relacije:

$$M_n = \Phi_n \cdot I_n \Rightarrow M_1 = \Phi_n \cdot I_1 = M_{opt} \Rightarrow \frac{M_{opt}}{M_n} = \frac{I_1}{I_n} \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{M_{opt}}{M_n} I_n = \frac{120}{167,11} \cdot 100 = 71,81 \text{ A} \quad (2.4)$$

U tom režimu vrednost elektromotorne sile se nalazi primenom sledećih relacija:

$$E_n = \Phi_n \omega_n \Rightarrow E_1 = \Phi_n \omega_1 \Rightarrow \frac{E_1}{E_n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{n_1}{n_n} \Rightarrow$$

$$E_1 = \frac{n_1}{n_n} E_n = \frac{1000}{1200} \cdot 210 = 175 \text{ V} \quad (2.5)$$

Dakle, promenu brzine treba ostvariti smanjenjem napona koji se dovodi na motor:

$$U_1 = E_1 + R_a I_1 = 175 + 0,2 \cdot 71,81 = 189,36 \text{ V} \quad (2.6)$$

Druga, neekonomična mogućnost je da se umesto smanjenja napona u kolo rotora doda dodatni otpornik otpornosti:

$$R_d = \frac{U_n - E_1}{I_1} - R_a = \frac{230 - 175}{71,81} - 0,2 = 0,566 \Omega \quad (2.7)$$

b.) Moment opterećenja u traženoj radnoj tački je:

$$M_{opt1} = kn_2 = 0,12 \cdot 1400 = 168 Nm \quad (2.8)$$

Pošto je brzina obrtanja veća od nominalne, očigledno je da treba slabiti pobudu. Pri tome vrednost struje rotora motora nalazi se iz sledećih relacija:

$$M_n = \Phi_n \cdot I_n \Rightarrow M_2 = \Phi_2 \cdot I_2 = M_{opt2} \Rightarrow \frac{M_{opt2}}{M_n} = \frac{\Phi_2}{\Phi_n} \cdot \frac{I_2}{I_n} \quad (2.9)$$

$$E_n = \Phi_n \omega_n \Rightarrow E_2 = \Phi_2 \omega_2 \Rightarrow \frac{E_2}{E_n} = \frac{\Phi_2}{\Phi_n} \frac{\omega_2}{\omega_n} = \frac{\Phi_2}{\Phi_n} \cdot \frac{n_2}{n_n} \quad (2.10)$$

Ako se iz izraza (2.9) odredi nepoznati odnos flukseva ( $\Phi_2/\Phi_n$ ) i ubaci u izraz (2.10) dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{E_n} &= \frac{M_{opt2}}{M_n} \cdot \frac{I_n}{I_2} \cdot \frac{n_2}{n_n} \Rightarrow \\ \frac{M_{opt2}}{M_n} \cdot \frac{n_2}{n_n} \cdot E_2 I_n &= E_2 I_2 = (U_n - R_a I_2) I_2 = U_n I_2 - R_a I_2^2 \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$I_2^2 - \frac{U_n}{R_a} I_2 + \frac{M_{opt2}}{M_n} \cdot \frac{n_2}{n_n} \cdot \frac{E_n}{R_a} \cdot I_n = 0$$

Rešenje ove kvadratne jednačine je:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\frac{U_n}{R_a} \pm \sqrt{\left(\frac{U_n}{R_a}\right)^2 - 4 \frac{M_{opt2}}{M_n} \cdot \frac{n_2}{n_n} \cdot \frac{E_n}{R_a} \cdot I_n}}{2} = \\ &= \frac{U_n}{2R_a} \pm \sqrt{\left(\frac{U_n}{2R_a}\right)^2 - \frac{M_{opt2}}{M_n} \cdot \frac{n_2}{n_n} \cdot \frac{E_n}{R_a} \cdot I_n} = \\ &= \frac{230}{2 \cdot 0,2} \pm \sqrt{\left(\frac{230}{2 \cdot 0,2}\right)^2 - \frac{168}{167,11} \cdot \frac{1400}{1200} \cdot \frac{210}{0,2} \cdot 100} = \\ &= 575 \pm \sqrt{330625 - 123151,41} = \\ &= 575 \pm \sqrt{207472,58} = 575 \pm 455,49 = \begin{cases} 119,51 A \\ 1030,49 A \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Rešenje od  $I_2 = 1030,49 A$  je neprihvatljivo, tako da je:

$$I_2 = 119,51 A \quad (2.13)$$

Potreban odnos slabljenja polja nalazi se iz već poznate relacije za odnos momenata, ali sada poznavajući struju motora u drugom režimu ima se:



$$\frac{\Phi_2}{\Phi_n} = \frac{M_{opt2}}{M_n} \cdot \frac{I_n}{I_2} = \frac{168}{167,11} \cdot \frac{100}{119,51} = 0,841 \quad (2.14)$$

Odnosno struja pobude mora da se oslabi na vrednost:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_n} = \frac{LI_{p2}}{LI_{pn}} \Rightarrow I_{p2} = \frac{\Phi_2}{\Phi_n} I_{pn} = 0,841 \cdot 10 = 8,41 \text{ A} \quad (2.15)$$

### Zadaci za vežbanje

**3. Zadatak:** Motor jednosmerne struje sa rednom pobudom ima ukupni otpor namotaja  $0,5 \Omega$ .

- a.) Kada se priključi na napon od  $200 \text{ V}$  i optereti radnom mašinom otpornog momenta od  $40 \text{ Nm}$ , uzima iz mreže  $30 \text{ A}$  i obrće se sa  $1250 \text{ o/min}$ . Odrediti ulaznu i izlaznu snagu motora, stepen iskorišćenja i bilans gubitaka.
- b.) Ako moment radne mašine raste linearno sa brzinom obrtanja, odrediti napon napajanja potreban da se motor obrće sa  $800 \text{ o/min}$ . Koliku struju će tad motor uzimati? Odrediti ulaznu i izlaznu snagu motora, stepen iskorišćenja i bilans gubitaka.

**4. Zadatak:** Motor jednosmerne struje sa nezavisnom pobudom, otpora indukta  $1 \Omega$ , otpora pobude  $300 \Omega$ , priključen je na mrežu napona  $300 \text{ V}$ . U praznom hodu motor se obrće sa  $75 \text{ rad/s}$ . Pad napona na četkicama, gubici u gvožđu i snaga mehaničkih gubitaka ovog motora se mogu zanemariti. Magnetno kolo motora je nezasićeno.

- a.) Kada se optereti radnom mašinom čiji moment zavisi linearno od brzine obrtanja, on razvija moment konverzije od  $200 \text{ Nm}$ .
- b.) Zbog pogrešne manipulacije dodatnom opremom motora najednom dolazi do povišenja otpornosti pobudnog namotaja na  $400 \Omega$ . Šta će se desiti sa brzinom i opterećenjem motora?
- c.) Nakon toga, zbog uključenja ostalih potrošača koje ova mreža napaja, dolazi do smanjenja napona napajanja za  $10 \%$ .

Za navedena radna stanja odrediti koliku struju i snagu motor vuče iz mreže iz koje se napaja. Takođe odrediti kojom brzinom se motor obrće u datim radnim tačkama. Skicirati mehaničke karakteristike  $M_C = f(\omega)$  i naznačiti karakteristične radne tačke za razmatrane radne režime.