Њутнова биномна формула

Производ узастопних природних бројева $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ уобичајено је да се обележава са $n!$ (чита се n факторијел). Узимајући да је $0! \overset{def}{=} 1$, n факторијел се дефинише на следећи начин:

$$1! \overset{def}{=} 1$$

$$n! \overset{def}{=} (n-1)!\cdot n$$

Дакле:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$$

$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5; \qquad 5! = (5-2)!\cdot 4\cdot 5$$

$$7! = (7-1)!\cdot 7 = 6!\cdot 7$$

Биномни коефицијенти $\binom{n}{k}$, $0 \le k \le n$ дефинишу се на следећи начин:

$$\binom{n}{k} \overset{def}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}; \qquad \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$$

или

$$\binom{n}{k} \overset{def}{=} \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}; \quad \binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$$

Симбол $\binom{n}{k}$ чита се n над k.

Специјално је:

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{0}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1$$

Став 1. Ако је $k \le n,\ k, n \in N$, онда је:

а) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ б) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Доказ:

а) $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

б)

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k(n-k+1)}\\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\\ &= \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

Користећи став 1. можемо добити тзв. Паскалов троугао, који служи за израчунавање биномних коефицијената.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & & 1 & & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\binom{2}{k} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\binom{3}{k} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\binom{4}{k} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\binom{5}{k} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

…

Став 2. (Биномна формула) Ако су $a,b\in R$ и $n\in N$, тада је:

$(\forall n)(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k$, или у облику

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+\binom{n}{n}b^n$$

Доказ. Доказ биномне формуле изводимо применом принципа математичке индукције.

1. За $n=1$ је $(a+b)^1=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b=(a+b)$
2. Претпоставимо да формула важи за $n=k$, тј. да је

$$(a+b)^k=\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\cdots+\binom{k}{i}a^{k-i}b^i+\cdots+\binom{k}{k}b^k$$

Докажимо да формула важи за $n=k+1$.

Множењем претходне једнакости са $a+b$ добијамо:

$$(a+b)^k\cdot(a+b)=\left[\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\cdots+\binom{k}{i}a^{k-i}b^i+\cdots+\binom{k}{k}b^k\right](a+b)$$

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&=\binom{k}{0}a^{k+1}+\binom{k}{1}a^{k}b+\binom{k}{2}a^{k-1}b^2+\cdots+\binom{k}{i}a^{k-i+1}b^i+\cdots+\binom{k}{k}ab^k\\&+\binom{k}{0}a^{k}b+\binom{k}{1}a^{k-1}b^2+\binom{k}{2}a^{k-2}b^3+\cdots+\binom{k}{i}a^{k-i1}b^{i+1}+\cdots+\binom{k}{k}b^{k+1}\\&=\binom{k}{0}a^{k+1}+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]a^kb+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right]a^{k-1}b^2+\cdots+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]ab^k\\&+\binom{k}{k}b^{k+1}\end{aligned}$$

Како је $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}=1, \binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}, \binom{k}{r}+\binom{k}{r+1}=\binom{k+1}{r+1}$ ***

$$(a+b)^{k+1}=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\cdots+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

што је и требало доказати. Дакле, биномна формула важи за сваки природан број n.

Биномни коефицијенти, који се јављају у биномној формули су природни бројеви.

$$(a-b)^n=(a+(-b))^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot(-b^k)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k$$

Општи члан биномног обрасца:

$$B_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k$$

Задаци

1. Применом биномне формуле развити израз:

а) $(a+b)^3$

б) $(a-b)^3$

Решење:

а) $(a+b)^3=\binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3$

Пошто је $\binom{3}{0}=1, \binom{3}{1}=3, \binom{3}{2}=3, \binom{3}{3}=1$, биће

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

б) $$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2(-b) + \binom{3}{2}a(-b)^2 + \binom{3}{3}(-b)^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

2. Применом биномне формуле развити $(x-2x^2)^6$.

Решење:

$$(x-2x^2)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{6-k}\cdot(-2x^2)^k = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k\binom{6}{k}x^{6-k}\cdot(2x^2)^k$$

$$= (-1)^0\binom{6}{0}x^6 + (-1)^1\binom{6}{1}x^5(2x^2) + (-1)^2\binom{6}{2}x^4(2x^2)^2$$

$$+(-1)^3\binom{6}{3}x^3(2x^2)^3 + (-1)^4\binom{6}{4}x^2(2x^2)^4$$

$$+(-1)^5\binom{6}{5}x(2x^2)^5 + (-1)^6\binom{6}{6}(2x^2)^6$$

Пошто је: $\binom{6}{0}=1, \binom{6}{1}=6, \binom{6}{2}=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=15, \binom{6}{3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20$ и користећи особину биномних коефицијената да је $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ биће $\binom{6}{0}=\binom{6}{6}, \binom{6}{1}=\binom{6}{5}, \binom{6}{2}=\binom{6}{4}$, па је

$$(x-2x^2)^6 = x^6 - 12x^7 + 60x^8 - 160x^9 + 240x^{10} - 192x^{11} + 64x^{12}$$

3. Одредити пети члан у развијеном облику степена бинома $\left(x+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^6$.

Решење:

$$B_5 = B_{4+1} = \binom{6}{4}x^2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^4 = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^2\cdot\frac{1}{x} = 15x$$

4. Одредити средње чланове у развоју:

а) $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{10}$

б) $\left(3a-\frac{a^3}{6}\right)^9$

Решење:

а) $B_6 = B_{5+1} = \binom{10}{5}\left(\frac{a}{x}\right)^5\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^5 = 252$

б)

$$B_5 = B_{4+1} = \binom{9}{4}(3a)^5 \cdot \left(-\frac{a^3}{6}\right)^4 = \frac{189}{8}a^{17}$$

$$B_6 = B_{5+1} = \binom{9}{5}(3a)^4 \cdot \left(-\frac{a^3}{6}\right)^5 = -\frac{21}{16}a^{19}$$

5. Одредити члан који садржи:

а) x^{18} у развијеном облику бинома $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^{15}$

б) z^3 у развијеном облику бинома $\left(\sqrt{z} + \sqrt[3]{z}\right)^7$

Решење:

а) Општи члан датог бинома има облик

$$B_{k+1} = \binom{15}{k}\left(x^2\right)^{15-k} \cdot \left(\frac{3a}{x}\right)^k = \binom{15}{k}3^k \cdot a^k \cdot x^{30-3k}$$

Овај члан садржи x^{18} ако и само ако је

$30 - 3k = 18 \Leftrightarrow k = 4$

Дакле, $B_5 = \binom{15}{4}3^4 a^4 x^{18} = 110565 a^4 x^{18}$, садржи x^{18}.

б) Општи члан датог бинома има облик

$$B_{k+1} = \binom{7}{k}\left(\sqrt{z}\right)^{7-k} \cdot \left(\sqrt[3]{z}\right)^k = \binom{7}{k}z^{\frac{7-k}{2}} \cdot z^{\frac{k}{3}} = \binom{7}{k}z^{\frac{21-k}{6}}$$

Овај члан садржи z^3 ако и само ако је

$$\frac{21-k}{6} = 3 \Leftrightarrow k = 3$$

Одговор: Четврти члан развоја садржи z^3, тј.

$$B_4 = B_{3+1} = \binom{7}{3}z^{\frac{21-3}{6}} = \binom{7}{3}z^3 = 35z^3$$

6. У развоју бинома $\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x}\right)^9$ одредити члан који не садржи x.

Решење:

Општи члан датог бинома се може написати у облику

$$B_{k+1} = \binom{9}{k}\left(\frac{3x^2}{2}\right)^{9-k} \cdot \left(-\frac{1}{3x}\right)^k = \binom{9}{k}\frac{3^{9-2k}}{2^{9-k}} \cdot (-1)^k x^{18-3k}$$

Овај члан не садржи x ако и само ако је

$18 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 6$.

Одговор:

Седми члан развоја не садржи x.

$$B_7 = B_{6+1} = \binom{9}{k}\frac{3^{-3}}{2^3}(-1)^6 x^0 = \frac{21}{54}$$

7. У развоју бинома $(a+b)^n$ одредити n тако да је коефицијент трећег члана за 27 већи од коефицијента другог члана.

Решење:

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + 27$$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = n + 27$$

$$n^2 - n = 2n + 54$$

$$n^2 - 3n - 54 = 0$$

$$n_1 = -6, n_2 = 0$$

Како је n природан број то је решење $n = 9$.

8. Доказати да је $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Решење:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Задаци за самосталан рад

1. Развити по биномној формули

а) $(3+a)^5$ $\quad [243 + 405a + 270a^2 + 90a^3 + 15a^4 + a^5]$

б) $\left(\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x}\right)^6$ $\quad \left[\frac{64}{729}x^6 - \frac{32}{27}x^5 + \frac{20}{3}x^2 - 20 + \frac{135}{4x^2} - \frac{243}{8x^4} + \frac{729}{64x^6}\right]$

2. У развоју бинома $(a+b)^n$ одредити n тако да је коефицијент четвртог члана петнаест пута већи од коефицијента другог члана. $[n = 11]$

3. Одредити пети члан развоја

$\left(\sqrt{\frac{x^3}{a}} + \sqrt{\frac{y^5}{b^3}}\right)^8$ $\quad \left[\frac{70x^6y^{10}}{a^2b^6}\right]$

Напомена: Решење задатака дато је у заградама.