

Скуп комплексних бројева

1.1. Дефиниција комплексног броја

Једначина $x^2 + 1$ нема решења у скупу R реалних бројева, као и квадратна једначина $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, нема увек решења у скупу R .

Због тог формалног разлога и других практичних проблема, скуп R реалних бројева проширује се у скуп C комплексних бројева.

Дефиниција 1. Скуп C комплексних бројева је скуп свих уређених парова (x, y) реалних бројева, тј. $C = R^2 = R \times R = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ у којем су дефинисане операције „+“ (сабирање) и „ $\cdot$ “ (множење) на следећи начин:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Став 1. Декартов производ $C = R^2$ у односу на операције сабирање и множење има алгебарску структуру поља, тј.

$$1^\circ (a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$$

$$2^\circ (a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$$

$$3^\circ [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$$

$$4^\circ [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)]$$

$$5^\circ (a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

$$6^\circ (a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$$

$$7^\circ (a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

$$8^\circ (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0), (a, b) \neq (0, 0)$$

$$9^\circ (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f)$$

Доказ:

$$1^\circ (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$$

$$8^\circ (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$$

Број $(0, 0)$ је неутрални елемент за сабирање, а број $(-a, -b)$ је симетричан (супротан) елементу $(a, b) \in C$ за сабирање.

Комплексан број $(1, 0)$ је неутрални елемент за множење, а број $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ је симетричан (инверзан) елементу $(a, b) \neq (0, 0)$ за множење. Према томе, алгебарска структура $(C, +, \cdot)$ чини поље (поље комплексних бројева).

Комплексан број $(a, 0)$ је реалан број и пишемо $(a, 0) = a$. Тада за $a = 0$ је $(0, 0) = 0$ и за $a = 1$ је $(1, 0) = 1$.

Комплексан број $(0, 1)$ називамо имагинарна јединица и означавамо са $(0, 1) = i$.

Елемент $i \in C$ има особину да је

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1, \text{ тј.}$$

$$i^2 = -1, \text{ а одатле је } i = \sqrt{-1}.$$

Такође је:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i; i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1; i^5 = i^4 \cdot i = i; i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1 \text{ итд.}$$

Уопште се добија:

$$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i \text{ за } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Став 2. Комплексан број (x, y) може се написати у облику

$$z = (x, y) = x + yi$$

Доказ: Како је $i = (0, 1)$ за комплексан број $z = (x, y)$ је
 $z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi$

Облик комплексног број $z = x + yi$ зове се алгебарски, стандардни или Гаусов облик комплексног броја.

Реалан број x зовемо реални део, реалан број y имагинарни део комплексног броја z , у ознаци $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$.

Ако је $\operatorname{Re}(z) = 0$, тада је $z = yi$; такав број зовемо имагинаран број.

За $\operatorname{Im}(z) = 0$ добијамо $z = x$, тј. реалан број.

Комплексан број $\bar{z} = x - yi$ називамо конјуговано-комплексан број броја $z = x + yi$.

Из релација:

$$z = x + yi = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$$

$$\bar{z} = x - yi = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$$

следи

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Став 3. Производ конјуговано-комплексних бројева је реалан број.

Доказ:

Непосредно се добија

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

Израз облика $\sqrt{x^2 + y^2}$ назива се модуо комплексног броја (x, y) , у ознаци r или $|z|$

.

За комплексан број $z = x + yi$ је $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, односно $|z|^2 = x^2 + y^2$, а како је $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, то имамо да је:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

Пример 1: Дат је комплексан број $z = 3 - 4i$. Наћи њему конјуговано-комплексан број и израчунати њихове модуле.

Решење:

$$z = 3 - 4i, \quad |z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\bar{z} = 3 + 4i, \quad |\bar{z}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

1.2. Операције са комплексним бројевима у алгебарском облику

Два комплексна броја су једнака ако су имаједнаки реални и имагинарни делови, што је последица једнакости два уређена пара, дакле:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Пошто је сабирање и множење комплексних бројева већ дефинисано, задржаћемо се на осталим операцијама.

Одузимање. Како је $-z_1 = (-a, -b)$ супротан број комплексног броја $z_1 = (a, b)$, онда се израз $(c, d) + (-a, -b)$ пише у облику $(c, d) - (a, b)$ и зове се разлика комплексних бројева (c, d) и (a, b) , а то је операција одузимање.

Ако се стави $z_2(c, d)$ и $z_1(a, b)$, тада је разлика

$$z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1) = (c + di) - (a + bi) = c + di + ((-a) + (-b)i) = (c - a) + (d - b)i$$

Према томе, разлика је такође комплексан број.

Дељење. Како је $z_1^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ инверзни елемент елемента

$z_1 = (a, b) \neq (0, 0)$, онда се израз $(c, d) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ пише у облику $\frac{(c, d)}{(a, b)}$ и назива количник комплексних бројева (c, d) и (a, b) , а та операција дељење.

Тада је количник:

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2 \cdot z_1^{-1} = (c, d) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} \right)$$

или

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i,$$

при чему је $a^2 + b^2 \neq 0$, јер је по претпоставци, делилац $z_1 \neq 0$.

Количник два комплексна броја је комплексан број.

У пракси се дељење комплексног броја $z_2 = c + di$ комплексним бројем

$z_1 = a + bi \neq (0, 0)$ врши проширивањем разломка $\frac{z_2}{z_1}$ конјуговано комплексним бројем

$\overline{z_1} = a - bi$ броја z_1 .

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{c + di}{a + bi} = \frac{c + di}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{a^2 + b^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i$$

Количник два комплексна броја може да се нађе и на други начин, користећи дефиницију множења и једнакост два комплексна броја

$$\frac{z_2}{z_1} = x + yi, \quad z_1 \neq (0,0), \quad z = (x, y) = ?$$

$$\frac{c + di}{a + bi} = x + yi$$

$$c + di = (a + bi)(x + yi)$$

$$c + di = (ax - by) + (bx + ay)i$$

$$\begin{cases} ax - by = c \\ bx + ay = d \end{cases}$$

Решења овог система су:

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}$$

$$y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}$$

Пример 2. Наћи количник $\frac{z_2}{z_1}$ ако је $z_2 = 2 + 3i$ и $z_1 = 1 - i$.

Решење:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2 + 3i}{1 - i} = \frac{2 + 3i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{2 + 2i + 3i + 3i^2}{2} = \frac{2 + 5i + 3(-1)}{2} = \frac{-1 + 5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

Степеновање. Степен z^n комплексног броја z дефинишемо

$$z^n = \begin{cases} 1, & \text{за } n = 0 \\ z, & \text{за } n = 1 \\ z^{n-1} \cdot z, & \text{за } n > 1 \end{cases}$$

Операцију којом израчунавамо степен z^n зовемо степеновањем. Степеновање комплексног броја $z = a + bi$ у алгебарском облику може се вршити по биномној формули уз коришћење резултата за степеновање имагинарне јединице i .

Пример 3. Трећи степен комплексног броја $z = 3 - 2i$ је

$$\begin{aligned} z^3 &= (3 - 2i)^3 \\ &= (3 + (-2i))^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot (-2i) + 3 \cdot 3 \cdot (-2i)^2 + (-2i)^3 \\ &= 27 - 54i - 36 + 8i = -9 - 46i \end{aligned}$$

Кореновање. n -ти корен комплексног броја z је комплексан број z_1 , такав да је $z_1^n = z$; пишемо $z_1 = \sqrt[n]{z}$. Операција којом израчунавамо комплексан број z_1 зовемо кореновање.

У пракси се кореновање комплексних бројева у алгебарском облику врши само ако је изложилац корена $n = 2$, а уколико је $n \geq 3$ користимо другу методу.

Покажимо како се израчунава квадратни корен.

Нека је $z_1 = x + yi$ тражени квадратни корен комплексног броја $z = a + bi$, тада је:

$$\begin{aligned}
 z_1 = \sqrt{z} &\Rightarrow x + yi = \sqrt{a + bi} \\
 &\Rightarrow (x + yi)^2 = a + bi \\
 &\Rightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi
 \end{aligned}$$

Користећи својство једнакости комплексних бројева, добијамо систем једначина:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Решавањем овог система добијамо два решења (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , а тиме и за z добијамо две вредности.

Пример 4. Наћи квадратни корен комплексног броја $z = 3 + 4i$.

Решење:

Нека је $z_1 = x + yi$ тражени квадратни корен комплексног броја $z = 3 + 4i$, тада је:

$$x + yi = \sqrt{3 + 4i}$$

$$(x + yi)^2 = 3 + 4i$$

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = 3 + 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{x} \end{cases}$$

$$x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0, t_1 = 4, t_2 = -1$$

$$x^2 = 4, \quad x^2 = -1$$

$$x_{1,2} = \pm 2, \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{-1} = \pm i$$

Како је x реалан број, то су решења за $x = 2$ и -2 .

$$\text{за } x_1 = 2, y_1 = \frac{2}{x_1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{за } x_2 = -2, y_2 = \frac{2}{x_2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$z_1' = (x_1, y_1) = (2, 1) = 2 + i$$

$$z_2'' = (x_2, y_2) = (-2, -1) = -2 - i$$

За комплексне бројеве и њихове модуле важе ставови.

Став 4. Нека су z_1 и z_2 комплексни бројеви, тада је

$$1^\circ \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$2^\circ \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0$$

Доказ: Нека је $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$. Тада је $\overline{z_1} = a - bi$ и $\overline{z_2} = c - di$ и имамо:

1°

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}\end{aligned}$$

Слично се доказује за разлику.

2°

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (ac - bd) + (-ad - bc)i = (ac - bi)(c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\end{aligned}$$

Сличан је доказ за количник.

Став 5. За модуле комплексних бројева важи:

1° $|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

2° $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

3° $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

4° $|z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|$

Доказ:

1°

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0; \quad |z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

2°

Како је $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ то имамо

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)} = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) = (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

Добили смо да је:

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

3°

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{z_1} \cdot z_2) + |z_2|^2\end{aligned}$$

јер је:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \Rightarrow z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$\operatorname{Re}(z) \leq |z|, \quad |\overline{z}| = |z|, \quad \overline{\overline{z}} = z$$

то ће бити:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|\overline{z_1} z_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

4°

$$\begin{aligned}
|z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2) \cdot \overline{(z_1 - z_2)} = (z_1 - z_2) \cdot (\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\
&= z_1 \cdot \overline{z_1} - z_1 \cdot \overline{z_2} - z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_1|^2 - (z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1}) + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{z_1} \cdot z_2) + |z_2|^2 \geq |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2 \\
|z_1 - z_2|^2 &\geq (|z_1| - |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||
\end{aligned}$$

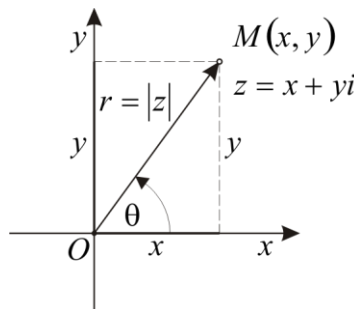
1.3. Комплексна равна

Правоугли Декартов координатни систем у равни xOy , код кога је оса Ox узета за реалну осу, а Oy за имагинарну осу, назива се комплексна равна или Гаусова равна.

У овако дефинисаној равни свакој тачки одговара један и само један комплексан број и обрнуто, сваком комплексном броју одговара једна и само једна тачка у комплексној равни.

Броју $z = (x, y) = x + yi$ одговара тачка $M(x, y)$ у комплексној равни (сл. 1).

Реални део x комплексног броја је апсциса, а имагинарни део y је ордината тачке M .



Слика 1.

Растојање тачке, која одговара комплексном броју $z = (x, y) = x + yi$ од координатног почетка $(0,0)$ зове се модуо комплексног броја и обележава се са $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Сви комплексни бројеви истог модула r леже на кружници са центром у $(0,0)$, полупречника r .

Угао између позитивног дела Ox -осе и дужи OM називамо аргумент комплексног броја и означавамо га са θ или $\arg(z)$. Аргументом називамо и угао $\theta + 2k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и означавамо са $\operatorname{Arg}(z)$, али се тада вредност $0 \leq \theta \leq 2\pi$ назива главна вредност аргумента.

$$\arg(z) = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \operatorname{Arg}(z) = \theta + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Аргумент броја $z = 0$ се не дефинише.

1.4. Тригонометријски облик комплексног броја

Комплексном броју $z = x + yi$ се може дати један други облик, који ће нам омогућити да потпуније сагледамо операције са комплексним бројевима.

Како је:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

комплексан број $z = x + yi$ можемо изразити овако

$$z = x + yi = r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

тј.

$$z = r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta) = [r, \theta] \quad (1)$$

Једнакост (1) је тригонометријски или Кошијев облик комплексног броја.

Ознака $[r, \theta]$ уведена је да би се истакла зависност комплексног броја од модула r и аргумента θ , као и због краћег записивања.

Пример 5. Комплексан број $z = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$ пишемо у облику $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

Због периодичности тригонометријских функција

$$\cos \theta = \cos(\theta + 2k\pi), \quad \sin \theta = \sin(\theta + 2k\pi)$$

из (1) добијамо

$$z = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)] = [r, \theta + 2k\pi], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

Једнакост (2) је општи тригонометријски облик комплексног броја.

За конјуговано комплексан број $\bar{z} = x - yi$ тригонометријски облик је

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \cdot \sin \theta)$$

Нека су дата два комплексна броја $z_1 = [r_1, \theta_1]$ и $z_2 = [r_2, \theta_2]$. Из услова једнакости $z_1 = z_2$ долазимо до еквиваленције

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

То значи да су два комплексна броја у тригонометријском облику једнака ако и само ако су им модули једнаки, а аргументи се разликују за $2k\pi$.

Формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (3)$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

омогућавају да се врши трансформација комплексних бројева из алгебарског у тригонометријски облик и обрнуто.

При одређивању аргумента θ треба водити рачуна о знацима реалног и имагинарног дела комплексног броја, односно о знацима за $\cos \theta$ и $\sin \theta$.

Пример 6. Комплексан број $z = -1 + i$ дат алгебарском облику, написати у тригонометријском облику.

Решење: Комплексан број дат у тригонометријском облику гласи:

$$z = r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

Да бисмо га одредили, треба му одредити модул r и аргумент θ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}(-1), \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Пошто су истовремено $\sin \theta > 0$ и $\cos \theta < 0$ само у другом квадранту, то значи да аргумент θ датог комплексног броја треба тражити у другом квадранту.

Према томе, тригонометријски облик комплексног броја $z = -1 + i$ гласи:

$$z = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] \text{ или}$$

$$z = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Увођење тригонометријског облика комплексног броја омогућава да се неке операције са комплексним бројевима ефикасније изводе.

Множење. Нека су дата два комплексна броја

$$z_1 = [r_1, \theta_1] \text{ и } z_2 = [r_2, \theta_2]$$

Став 6. Производ два комплексна броја је комплексан број, чији је модуо једнак производу модула, а аргумент збиру аргумената чинилаца.

Доказ.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos \theta_1 + i \cdot \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \cdot \sin \theta_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i \cdot (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \end{aligned}$$

односно

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Одавде закључујемо да је:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ и } \arg(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2$$

па је тиме став доказана. Став 1. можемо записати и у облику:

$$[r_1, \theta_1] \cdot [r_2, \theta_2] = [r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2]$$

Методом математичке индукције се доказује да је у општем случају

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)] \quad (4)$$

а одатле је

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n| \text{ и } \arg(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n) = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n.$$

Дељење. Нека су дата два комплексна броја

$$z_1 = [r_1, \theta_1] \text{ и } z_2 = [r_2, \theta_2] \neq 0$$

Став 7. Количник два комплексна броја је комплексан број чији је модуо једнак количнику модула, а аргумент разлици аргумената дељеника и делиоца.

Доказ.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \cdot \sin \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \cdot \sin \theta_2)} \cdot \frac{\cos \theta_2 - i \cdot \sin \theta_2}{\cos \theta_2 - i \cdot \sin \theta_2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i \cdot (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} \end{aligned}$$

односно,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (5)$$

Одакле је:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ и } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$$

па је тиме став доказан. Став 2. краће записујемо:

$$[r_1, \theta_1] : [r_2, \theta_2] = [r_1 : r_2, \theta_1 - \theta_2]$$

Пример 7. Множењем и дељењем комплексних бројева $z_1 = \left[6, \frac{2\pi}{3}\right]$ и $z_2 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$,

добиамо:

$$z_1 \cdot z_2 = \left[6, \frac{2\pi}{3}\right] \cdot \left[2, \frac{\pi}{3}\right] = \left[6 \cdot 2, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right] = [12, \pi] = -12$$

$$z_1 : z_2 = \left[6, \frac{2\pi}{3}\right] : \left[2, \frac{\pi}{3}\right] = \left[6 : 2, \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right] = \left[3, \frac{\pi}{3}\right] = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Степеновање. Нека је дат комплексан број

$$z = [r, \theta]$$

Став 8. n -ти степен комплексног броја је комплексан број, чији је модуло једнак n -том степену модула, а аргумент n -тоструком аргументу комплексног броја.

Доказ. Ако се у формули (4) стави

$$z_k = z, r_k = r \text{ и } \theta_k = \theta, k = 1, 2, 3, \dots, n,$$

добиамо

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta) \quad (6)$$

Одатле је:

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n\theta$$

што је требало доказати. Краћи запис става 8. је

$$[r, \theta]^n = [r^n, n\theta].$$

Ако употребимо $\frac{1}{z^n} = z^{-n}$, из формуле (6) добијамо

$$z^{-n} = r^{-n} (\cos n\theta - i \cdot \sin n\theta) = \frac{1}{r^n} [\cos(-n\theta) + i \cdot \sin(-n\theta)]$$

што показује како се степенује комплексан број целим негативним бројем.

Моаврова формула. Из формуле (6) имамо:

$$[r(\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta).$$

За случај када је $r = 1$ добијамо:

$$(\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta)^n = \cos n\theta + i \cdot \sin n\theta \quad (7)$$

Формула (7) је Моаврова формула.

Пример 8. Изразити тригонометријске функције $\sin 2x$ и $\cos 2x$ у зависности од $\sin x$ и $\cos x$.

Решење:

Применом формуле (7) за $n = 2$ је

$$(\cos x + i \cdot \sin x)^2 = \cos 2x + i \cdot \sin 2x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2i \sin x \cos x = \cos 2x + i \sin 2x$$

Користећи једнакост два комплексна броја добијамо

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ и } \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Кореновање. Нека је дат комплексан број

$$z = [r, \theta], z \neq 0$$

Став 9. n -ти корен комплексног броја z има n различитих вредности одређених формулом:

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right); k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (8)$$

Доказ. Нека је $w = [\rho, \varphi]$ n -ти корен комплексног броја z , тј. $w = \sqrt[n]{z}$, тада је $w^n = z$, па је

$$\rho^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

или

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

односно:

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r [\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)], k = 0, \pm 1, \pm 2 \pm \dots$$

Одавде је

$$\rho^n = r \wedge n\varphi = \theta + 2k\pi,$$

тј.

$$\rho = \sqrt[n]{r} \wedge \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

па добијамо:

$$\sqrt[n]{z} = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right] = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

За $k = 0$ добија се главна вредност n -тог корена комплексног броја z , која гласи:

$$z_0 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$$

Ако је комплексан број $z = 0$, онда је модуло $r = 0$, па су све вредности $\sqrt[n]{z}$ једнаке нули.

Пример 9. Израчунати пети корен комплексног броја $z = -1 + i$.

Решење:

$$z = -1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$z_k = \sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{5} \right), k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$z_0 = \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{20} + i \sin \frac{3\pi}{20} \right)$$

$$z_1 = \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{20} + i \sin \frac{11\pi}{20} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{20} + i \sin \frac{19\pi}{20} \right)$$

$$z_3 = \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{27\pi}{20} + i \sin \frac{27\pi}{20} \right)$$

$$z_4 = \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{35\pi}{20} + i \sin \frac{35\pi}{20} \right)$$

Напомена: формула (8) за кореновање комплексних бројева може се користити и при решавању биномних једначина облика

$$z^n = a.$$

Пример 10. Решити биномну једначину $z^4 + 16 = 0$.

$$z^4 + 16 = 0 \Rightarrow z^4 = -16 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{-1} = 2\sqrt[4]{-1}$$

Из (8) добијамо

$$\sqrt[4]{-1} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \text{ за } k = 0, 1, 2, 3$$

односно,

$$z_k = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3$$

па су решења једначине:

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}(1 + i)$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}(-1 + i)$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}(-1 - i)$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}(1 - i)$$

1.5. Експоненцијални облик комплексног броја

Експоненцијални облик комплексног броја је

$$z = re^{i\theta}, \text{ где је } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, (e \approx 2,71)$$

Експоненцијални облик комплексног броја потиче од Ојлера и назива се и Ојлеров облик комплексног броја.

Нека је:

$z_1 = r_1 e^{\theta_1 i}$ и $z_2 = r_2 e^{\theta_2 i}$ за множење и дељење имамо:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{(\theta_1 + \theta_2)i}, \quad z_1 : z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1 - \theta_2)i}$$

Пример 11. Комплексни број $z = -1 - i$ написати у Ојлеровом облику $z = r e^{\theta i}$.

Решење:

Да бисмо дати комплексни број написали у Ојлеровом облику, потребно је одредити модул r и аргумент θ , тј.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$$

Према томе, Ојлеров облик комплексног броја $z = -1 - i$ гласи:

$$z = \sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{4} i}.$$

Задаци

1. Одредити алгебарски облик комплексних бројева, који одговарају тачкама у комплексној равни:

а) $(3, 4)$

б) $(-2, 0)$

в) $(0, 2)$

г) $(-1, -1)$

Решење:

а) $(3, 4)$, $\operatorname{Re}(z) = 3$, $\operatorname{Im}(z) = 4$, према томе, $z = 3 + 4i$

б) $z = -2$

в) $z = 2i$

г) $z = -1 - i$

2. Одредити тачке у комплексној равни, које одговарају комплексним бројевима:

а) $z_1 = -i$

б) $z_2 = 1 + i$

в) $z_3 = \sqrt{2}$

г) $z_4 = 2 - 3i$

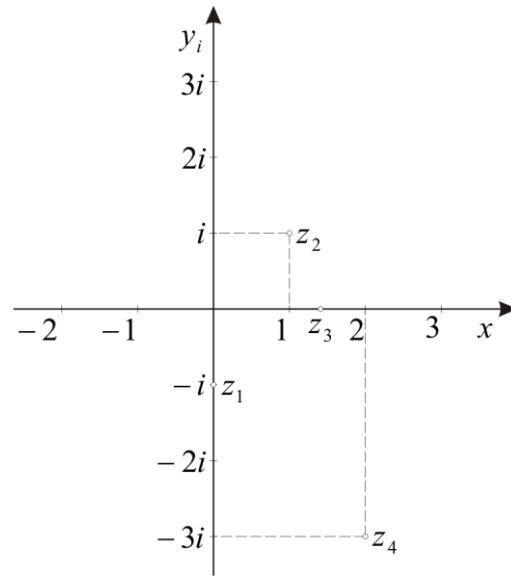
Решење:

а) $(0, -1)$

б) $(1, 1)$

в) $(\sqrt{2}, 0)$

г) $(2, -3)$



Слика 2.

3. Одредити реални и имагинарни део комплексних бројева:

а) $z_1 = 3i$

б) $z_2 = 5$

в) $z_3 = 2 - 3i$

г) $z_4 = (1 - i)^{-2}$

д) $z_5 = \frac{(1 - i)^3}{1 + i}$

е) $z_6 = pi + q + r + i$

Решење:

а) $z_1 = 3i, \quad \operatorname{Re}(z_1) = 0, \quad \operatorname{Im}(z_1) = 3$

б) $z_2 = 5, \quad \operatorname{Re}(z_2) = 5, \quad \operatorname{Im}(z_2) = 0$

в) $z_3 = 2 - 3i, \quad \operatorname{Re}(z_3) = 2, \quad \operatorname{Im}(z_3) = -3$

г) $z_4 = (1 - i)^{-2}$

$$z_4 = \frac{1}{(1 - i)^2} = \frac{1}{1 - 2i + i^2} = \frac{1}{1 - 2i + (-1)} = -\frac{1}{2i} = -\frac{1}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-i}{2i^2}$$

$$z_4 = \frac{1}{2}i, \quad \operatorname{Re}(z_4) = 0, \quad \operatorname{Im}(z_4) = \frac{1}{2}$$

д) $z_5 = \frac{(1 - i)^3}{1 + i}$

$$\begin{aligned} z_5 &= \frac{1 - 3i + 3i^2 - i^3}{1 + i} = \frac{1 - 3i - 3 + i}{1 + i} = \frac{-2 - 2i}{1 + i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} \\ &= \frac{-2 + 2i - 2i + 2i^2}{1 - i + i - i^2} = \frac{-2 - 2}{2} = -2 \end{aligned}$$

$$z_5 = -2, \quad \operatorname{Re}(z_5) = 2, \quad \operatorname{Im}(z_5) = 0$$

е) $z_6 = pi + q + r + i$

$$z_6 = (q + r) + (p + 1)i, \quad \operatorname{Re}(z_6) = q + r, \operatorname{Im}(z_6) = p + 1$$

4. Израчунати:

а) i^{28}

б) i^{37}

в) i^{50}

г) i^{63}

Решење:

а) $i^{28} = i^{4 \cdot 7} = 1$

б) $i^{37} = i^{4 \cdot 9 + 1} = i$

в) $i^{50} = i^{4 \cdot 12 + 2} = -1$

г) $i^{63} = i^{4 \cdot 15 + 3} = -i$

5. Одредити реални и имагинарни део комплексног броја

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n, n \in \mathbb{N}$$

Решење:

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n = \left(\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \right)^n = \left(\frac{2i}{2} \right)^n = i^n$$

за $n = 4k$, $i^{4k} = 1$, $\operatorname{Re}(z) = 1$, $\operatorname{Im}(z) = 0$

за $n = 4k + 1$, $i^{4k+1} = i$, $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) = 1$

за $n = 4k + 2$, $i^{4k+2} = -1$, $\operatorname{Re}(z) = -1$, $\operatorname{Im}(z) = 0$

за $n = 4k + 3$, $i^{4k+3} = -i$, $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) = -1$

или

$$z = i^n = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \cos \frac{n\pi}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \sin \frac{n\pi}{2}$$

6. Извршити назначене рачунске операције

а) $\frac{1-3i}{1+i} - \frac{i}{2+i}$

б) $\frac{1+i}{2+i} \cdot (3+2i)$

Решење:

а) $\frac{1-3i}{1+i} - \frac{i}{2+i} = \frac{(1-3i) \cdot (2+i) - i(1+i)}{(1+i)(2+i)}$

$$\frac{1-3i}{1+i} - \frac{i}{2+i} = \frac{2-6i+i-3i^2-i-i^2}{2+2i+i+i^2} = \frac{2-6i+i+3-i+1}{2+2i+i-1}$$

$$= \frac{6-6i}{1+3i} = \frac{6-6i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{6-6i-18i+18i^2}{1^2+3^2}$$

$$= \frac{6-24i-18}{10} = \frac{-12-24i}{10} = -\frac{6}{5} - \frac{12}{5}i$$

$$\frac{1+i}{2+i} \cdot (3+2i) = \frac{3+3i+2i+2i^2}{2+i} = \frac{3+5i-2}{2+i} = \frac{1+5i}{2+i}$$

б) $= \frac{1+5i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2+10i-i-5i^2}{2^2+1^2} = \frac{2+9i+5}{5}$

$$= \frac{7+9i}{5} = \frac{7}{5} + \frac{9}{5}i$$

7. Израчунати вредност израза

$$\frac{z + \bar{z}}{1 - z \cdot \bar{z}} \text{ за } z = 1 - i$$

Решење:

$$\frac{z + \bar{z}}{1 - z \cdot \bar{z}} = \frac{1 - i + 1 + i}{1 - (1 - i)(1 + i)} = \frac{2}{1 - 2} = -2$$

8. Показати да је $z = \frac{(1+i)^6 - (1-i)^6}{(1+i)^6 \cdot (1-i)^6}$ имагинаран број.

Решење:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)^6 - (1-i)^6}{(1+i)^6 \cdot (1-i)^6} = \frac{\left((1+i)^2\right)^3 - \left((1-i)^2\right)^3}{\left((1+i) \cdot (1-i)\right)^6} = \frac{(2i)^3 - (-2i)^3}{2^6} \\ &= \frac{8i^3 + 8i^3}{2^6} = \frac{16i^3}{64} = \frac{i^3}{4} = \frac{-i}{4} = -\frac{1}{4}i \end{aligned}$$

9. Одредити све комплексне бројеве, који задовољавају релацију $\bar{z} = z^2$.

Решење:

$$\bar{z} = z^2, \text{ нека је } z = x + yi$$

$$\overline{x + yi} = (x + yi)^2$$

$$x - yi = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \end{cases}$$

$$2xy + y = 0, \quad (2x + 1)y = 0, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad y = 0$$

$$\text{за } x = -\frac{1}{2} \text{ је } \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}, y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{за } y = 0 \text{ је } x^2 = x, x^2 - x = 0, x(x - 1) = 0, x = 0, x = 1$$

$$z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i; z = 0; z = 1$$

10. Одредити скуп тачака, које задовољавају релацију

а) $|z - 3| < 5$

б) $|z + 2| + |z - 2| = 5$

в) $3 \leq |z + i| \leq 5$

Решење:

Нека је $z = x + yi$. Тада је:

а)

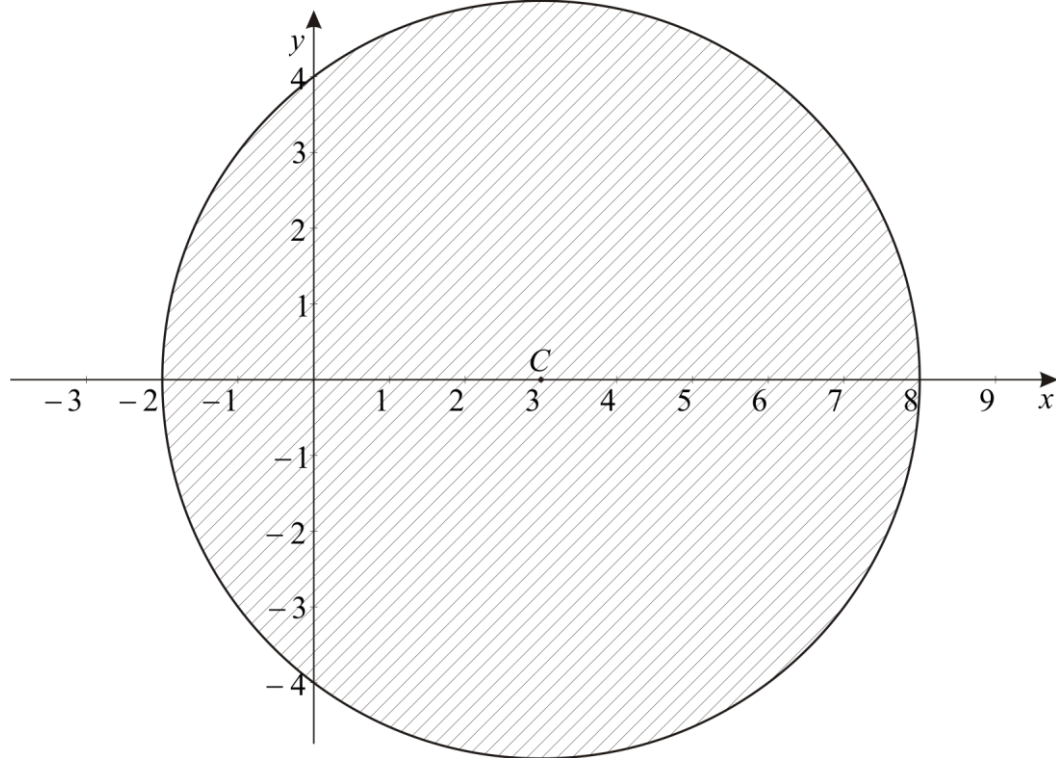
$$|x + yi - 3| < 5$$

$$|(x - 3) + yi| < 5$$

$$\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} < 5$$

$$(x - 3)^2 + y^2 < 5^2$$

Дакле, све тачке унутар кружнице са центром у $C(3,0)$ и полупречником $r = 5$ задовољавају дату неједначину (сл. 3).



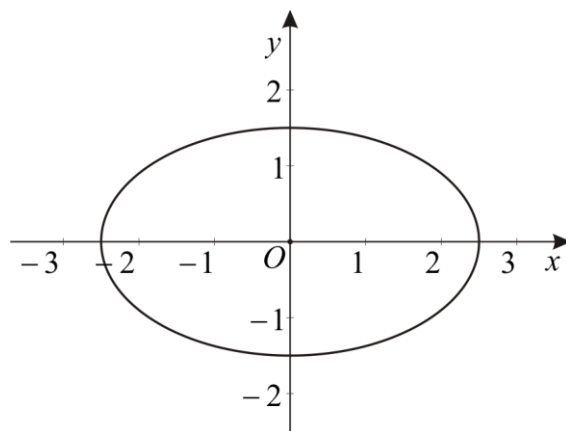
Слика 3.

б)

$$\begin{aligned}
&|x + yi + 2| + |x + yi - 2| = 5 \\
&|(x+2) + yi| + |(x-2) + yi| = 5 \\
&\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 5 \\
&\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 5 - \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\
&\left(\sqrt{(x+2)^2 + y^2}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{(x-2)^2 + y^2}\right)^2 \\
&(x+2)^2 + y^2 = 25 - 10\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + (x-2)^2 + y^2 \\
&10\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 25 + x^2 - 4x + 4 + y^2 - (x+2)^2 + y^2 \\
&10\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 25 + x^2 - 4x + 4 + y^2 - x^2 - 4x - 4 - y^2 + y^2 \\
&10\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 25 - 8x \\
&100[(x-2)^2 + y^2] = 625 - 400x + 64x^2 \\
&100x^2 + 100y^2 - 400x + 400 = 625 - 400x + 64x^2 \\
&36x^2 + 100y^2 = 225 \\
&\frac{x^2}{\frac{225}{36}} + \frac{y^2}{\frac{225}{100}} = 1 \\
&\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1, \quad a = \frac{5}{2}, \quad b = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Све тачке на елипси, чије су полуосе $a = \frac{5}{2}$ и $b = \frac{3}{2}$ задовољавају дату једначину (сл.

4).



Слика 4.

в)

$$3 \leq |x + yi + i| \leq 5$$

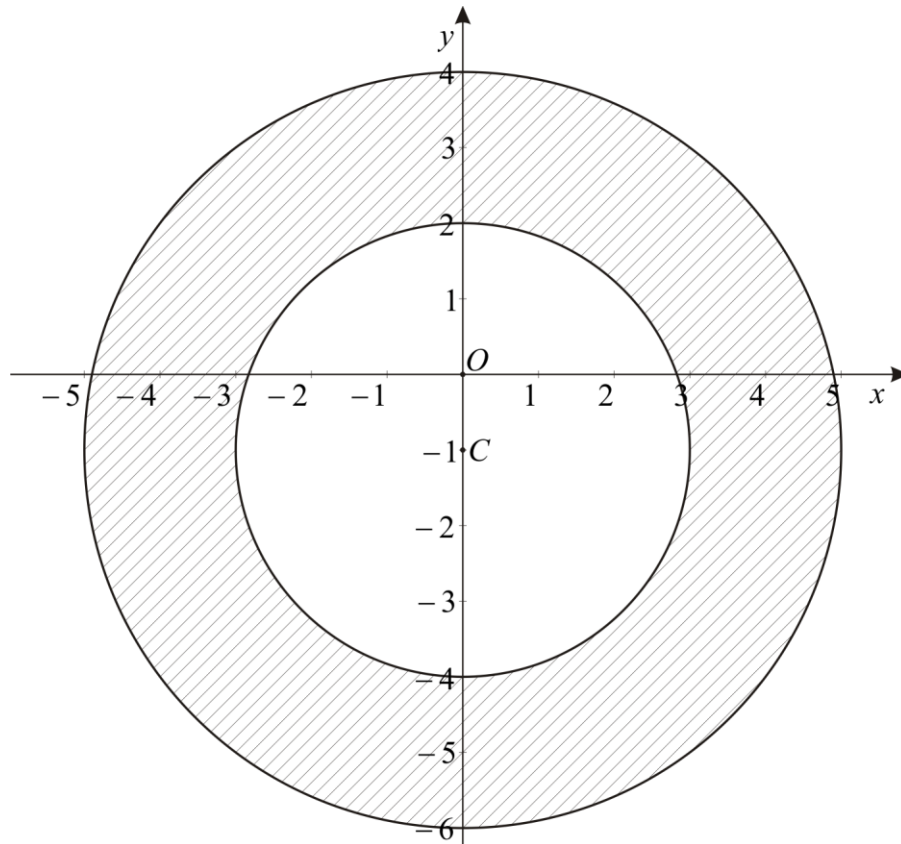
$$3 \leq |x + (y+1)i| \leq 5$$

$$3 \leq \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \leq 5$$

$$3^2 \leq \left(\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \right)^2 \leq 5^2$$

$$3^2 \leq x^2 + (y+1)^2 \leq 5^2$$

Као што видимо, дате неједначине задовољаваће све тачке кружног прстена ограниченог концентричним кружницама са центром у тачки $C(0, -1)$ и полупречницима $r_1 = 3$ и $r_2 = 5$, при чему том скупу припадају и све тачке са кружница (сл. 5).



Слика 5.

11. Користећи формулу $\sqrt{a+bi} = x + yi$; $a, b \in R$; $x, y \in R$ одредити вредност квадратног корена комплексног броја:

- а) $15 - 8i$
- б) i

Решење:

- а)

$$\sqrt{15-8i} = x + yi$$

$$15-8i = (x+yi)^2$$

$$15-8i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = -8 \end{cases}$$

$$y = \frac{-4}{x}$$

$$x^2 - \left(-\frac{4}{x}\right)^2 = 15$$

$$x^2 - \frac{16}{x^2} = 15$$

$$x^4 - 15x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16, \quad x^2 = -1$$

Како је $x \in R$, то се узима само прво решење.

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$$\text{за } x = 4, \quad y = \frac{-4}{4} = -1, \quad (x, y) = (4, -1) = 4 - i$$

$$\text{за } x = -4, \quad y = \frac{-4}{-4} = 1, \quad (x, y) = (-4, 1) = -4 + i$$

б)

$$\sqrt{i} = x + yi$$

$$i = (x + yi)^2$$

$$i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2x}, x \neq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 0$$

$$4x^4 - 1 = 0$$

$$x^4 = \frac{1}{4}, \quad (x^2)^4 = \frac{1}{4}, \quad x^2 = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{2},$$

$$x^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ова решења одбацујемо јер нису реални бројеви}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{за } x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad (x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{за } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad (x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

12. Одредити модуо и аргумент комплексних бројева: $z_1 = i$; $z_2 = -1 + i$; $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$;

$z_4 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_5 = \sqrt{3} - i$; $z_6 = 3$; $z_7 = -3i$; $z_8 = -3 - 3i$, а затим написати тригонометријски облик $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Решење:

$$z_1 = i$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, r = \sqrt{0^2 + 1^2}, r = 1$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}, \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{0} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$z_2 = -1 + i$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \right)$$

$$z_3 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}, r = 2$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z_3 = 2 \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_4 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}, r = 2$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$z_4 = 2 \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right)$$

$$z_5 = \sqrt{3} - i$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}, r = 2$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{11\pi}{6}$$

$$z_5 = 2 \left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} \right)$$

$$z_6 = 3$$

$$r = \sqrt{3^2 + 0^2}, r = 3$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{0}{3} = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$z_6 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$z_7 = -3i$$

$$r = \sqrt{0^2 + (-3)^2}, r = 3$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-3}{0} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$z_7 = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$z_8 = -3 - 3i$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}, r = 3\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-3}{-3} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$z_8 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

13. Представити у тригонометријском облику бројеве: $z_1 = \frac{3+i}{2-i}$ и $z_2 = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^2$.

Решење:

$$z_1 = \frac{3+i}{2-i} = \frac{3+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{6+2i+3i+i^2}{2^2+1^2} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}; \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^2 = \left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \right)^3 = \left(\frac{-2i}{2} \right)^3 = -i^3 = -(-i) = i$$

$$r = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{0} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

14. Одредити комплексан број z ако је $\arg(z+1) = \frac{\pi}{4}$ и $|z+1| = 4$.

Решење:

$$z = x + yi$$

$$\arg(x + yi + 1) = \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad |x + yi + 1| = 4$$

$$\arg((x + 1) + yi) = \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad |(x + 1) + yi| = 4$$

$$\frac{y}{x + 1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 4$$

$$\frac{y}{x + 1} = 1 \quad \wedge \quad (x + 1)^2 + y^2 = 16$$

$$\begin{cases} \frac{y}{x + 1} = 1 \\ (x + 1)^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

$$y = x + 1$$

$$(x + 1)^2 + (x + 1)^2 = 16$$

$$2(x + 1)^2 = 16$$

$$(x + 1)^2 = 8$$

$$x + 1 = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x = \pm 2\sqrt{2} - 1$$

$$\text{за } x = 2\sqrt{2} - 1, \quad y = 2\sqrt{2} - 1 + 1 = 2\sqrt{2}$$

$$\text{за } x = -2\sqrt{2} - 1, \quad y = -2\sqrt{2} - 1 + 1 = -2\sqrt{2}$$

15. Израчунати:

$$\text{a) } \frac{(1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{10}}$$

$$\text{б) } \left(1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^6$$

Решење:

Користимо формулу $[r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta)$

a)

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1^{15}}{z_2^{10}} &= \frac{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{15}}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10}} = \frac{2^{15}\left(\cos\frac{15\pi}{3} + i\sin\frac{15\pi}{3}\right)}{(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{2^{15}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi)}{2^5\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right)} = \frac{2^{15}[\cos(\pi + 4\pi) + i\sin(\pi + 4\pi)]}{2^5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)\right]} \\
&= 2^{10} \cdot \frac{\cos\pi + i\sin\pi}{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = 2^{10} \cdot \frac{-1}{i} = 2^{10} \cdot \frac{1}{-i} = -2^{10} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = 2^{10}i
\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
z &= 1 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\
r &= \sqrt{\left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 2\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3}} \\
&= \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\
\operatorname{tg}\theta &= \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1 + \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \\
z &= \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
z^6 &= \left(1 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6 = \left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6 \\
&= (\sqrt{3})^6 \left(\cos\frac{6\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi}{6}\right) = 3^3(\cos\pi + i\sin\pi) = -27
\end{aligned}$$

16. Израчунати:

а) z^{20} , ако је $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

б) z^6 , ако је $z = 1 - i\sqrt{3}$

Решење:

Користимо формулу $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

а)

$$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \quad r = 1; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} z^{20} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{20} = \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)^{20} = \cos \frac{100\pi}{3} + i \sin \frac{100\pi}{3} \\ &= \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 32\pi \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} + 32\pi \right) = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

б)

$$z = 1 - i\sqrt{3}; \quad r = 2; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} z^6 &= (1 - i\sqrt{3})^6 = \left[2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \right]^6 = 2^6 \left(\cos \frac{30\pi}{3} + i \sin \frac{30\pi}{3} \right) \\ &= 64(\cos 10\pi + i \sin 10\pi) = 64; \quad z^6 = 64 \end{aligned}$$

17. Одредити производ комплексних бројева $z_1 = 4\sqrt{2}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ и

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ).$$

Решење:

Применом обрасца $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ добија се

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} [\cos(75^\circ + 15^\circ) + i \sin(75^\circ + 15^\circ)] \\ &= 4(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 4i; \quad z_1 \cdot z_2 = 4i \end{aligned}$$

18. Дати су комплексни бројеви $z_1 = \sqrt{2}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ и $z_2 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$.

Одредити комплексан број $z = \frac{z_1}{z_2}$.

Решење:

Применом обрасца $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ добија се

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} [\cos(75^\circ - 30^\circ) + i \sin(75^\circ - 30^\circ)] = \frac{\sqrt{2}}{2} [\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i; \quad z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

19. Израчунати:

а) $\sqrt[3]{1}$

б) $\sqrt[4]{-4}$

в) $\sqrt{-9i}$

г) $\sqrt[5]{32i}$

Решење:

Применом обрасца

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

добија се:

а)

$$z_k = \sqrt[3]{1} = \cos \frac{0^\circ + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0^\circ + 2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

за $k = 0$:

$$z_0 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 1, z_0 = 1$$

за $k = 1$:

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

за $k = 2$:

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

б)

$$z_k = \sqrt[4]{-4}, k = 0, 1, 2, 3$$

Нека је $z = -4$, тада је $x = -4, y = 0$, па:

$$r = 4, \operatorname{tg} \theta = \frac{0}{-4} = 0 \Rightarrow \theta = \pi$$

$$z = -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$z_k = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3$$

$$\text{за } k = 0, z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \quad z_0 = 1 + i$$

$$\text{за } k = 1, z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \quad z_1 = -1 + i$$

$$\text{за } k = 2, z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \quad z_2 = -1 - i$$

$$\text{за } k = 3, z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \quad z_3 = 1 - i$$

Према томе решења су:

$$z_0 = 1 + i; \quad z_1 = -1 + i; \quad z_2 = -1 - i; \quad z_3 = 1 - i$$

в)

$$z_k = \sqrt{-9i}, k = 0, 1$$

Нека је $z = -9i$, тада је $x = 0, y = -9$, па:

$$r = 9, \operatorname{tg} \theta = \frac{-9}{0} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$z = -9i = 9 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$z_k = \sqrt{-9i} = \sqrt{9} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right), k = 0, 1$$

$$\text{за } k = 0, z_0 = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \quad z_0 = \frac{3}{\sqrt{2}}(-1 + i)$$

$$\text{за } k = 1, z_1 = 3 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \quad z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}(1 - i)$$

Према томе решења су:

$$z_0 = \frac{3}{\sqrt{2}}(-1 + i); \quad z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}(1 - i)$$

г)

$$z_k = \sqrt[5]{32i}, k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$z = 32i = 32 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$z_k = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5} \right), k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\text{за } k = 0, z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \right)$$

$$\text{за } k = 1, z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{за } k = 2, z_2 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{10} + i \sin \frac{9\pi}{10} \right)$$

$$\text{за } k = 3, z_3 = 2 \left(\cos \frac{13\pi}{10} + i \sin \frac{13\pi}{10} \right)$$

$$\text{за } k = 4, z_4 = 2 \left(\cos \frac{17\pi}{10} + i \sin \frac{17\pi}{10} \right)$$

20. Израчунати све вредности корена:

$$\text{а) } z_k = \sqrt[4]{-8 + 8i\sqrt{3}}$$

$$\text{б) } z_k = \sqrt[3]{\frac{2 + 2i}{1 - i}}$$

Решење:

а)

Нека је $z = -8 + 8i\sqrt{3}$, тада је $x = -8$, $y = 8\sqrt{3}$, па

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 3 \cdot 64} = \sqrt{4 \cdot 64} = 2 \cdot 8 = 16$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{8\sqrt{3}}{-8} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = -9i = 9 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$z = -8 + 8i\sqrt{3} = 16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$z_k = \sqrt[4]{-8 + 8i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right)$$

$$z_k = 2 \left(\cos \frac{\pi + 3k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 3k\pi}{6} \right), k = 0, 1, 2, 3$$

$$\text{за } k = 0, z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i;$$

$$z_0 = \sqrt{3} + i$$

$$\text{за } k = 1, z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 + i\sqrt{3};$$

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$\text{за } k = 2, z_2 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i;$$

$$z_2 = -\sqrt{3} - i$$

$$\text{за } k = 3, z_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 - i\sqrt{3};$$

$$z_3 = 1 - i\sqrt{3}$$

Према томе решења су:

$$z_0 = \sqrt{3} + i; \quad z_1 = -1 + i\sqrt{3}; \quad z_2 = -\sqrt{3} - i; \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3}$$

б)

$$z_k = \sqrt[3]{\frac{2 + 2i}{1 - i}}$$

Нека је

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 2i}{1 - i}$$

Налазимо тригонометријске облике комплексних бројева z_1 и z_2 :

$$z_1 = 2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), r = 2\sqrt{2}, \operatorname{tg} \theta = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right), r = \sqrt{2}, \operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$z_k = \sqrt[3]{2\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right]} = \sqrt[3]{2}\left[\cos\frac{-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right]$$

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-3\pi + 4k\pi}{6} + i\sin\frac{-3\pi + 4k\pi}{6}\right), k = 0, 1, 2$$

$$\text{за } k = 0, z_0 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt[3]{2}(0 - i) = -i\sqrt[3]{2}$$

$$\text{за } k = 1, z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$\text{за } k = 2, z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Решења су:

$$z_0 = -i\sqrt[3]{2}; \quad z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right); \quad z_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

21. Наћи z , ако је $\sqrt{2}z^3 - i = 1$.

Решење:

$$\sqrt{2}z^3 - i = 1$$

$$z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$z_k = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}$$

$$z_k = \cos\frac{\pi + 8k\pi}{12} + i\sin\frac{\pi + 8k\pi}{12}, k = 0, 1, 2$$

$$\text{за } k = 0, z_0 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$$

Користећи формуле: $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ добијамо:

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\frac{\pi}{6}}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\frac{\pi}{6}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sin \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{за } k = 1, z_1 = \cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{за } k = 2, z_2 = \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12}$$

Како је:

$$\begin{aligned} \cos \frac{17\pi}{12} &= \cos \left(-\frac{5\pi}{12} + 2\pi \right) = \cos \left(-\frac{5\pi}{12} \right) = \cos \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\frac{5\pi}{6}}{2} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{5\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{17\pi}{12} &= \sin \left(-\frac{5\pi}{12} + 2\pi \right) = \sin \left(-\frac{5\pi}{12} \right) = -\sin \frac{5\pi}{12} = -\sin \frac{\frac{5\pi}{6}}{2} \\ &= -\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{5\pi}{6}}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \end{aligned}$$

па је:

$$z_2 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} - i \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Према томе решења су:

$$z_0 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} - i \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Задаци за самосталан рад

1. Одредити модуо и аргумент комплексних бројева $z_1 = \frac{2-i}{3i-1}$ и $z_2 = \frac{i-3}{2+i}$.

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{4}; \sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

2. Израчунати вредност израза $\frac{z - \bar{z}}{1 + z \cdot \bar{z}}$, за $z = 1 + i$.

$$\left[\frac{2}{3}i \right]$$

3. Решити квадратну једначину $z^2 + 2(1+i)z + 4i = 0$.

$$[-2, -2i]$$

4. Одредити скуп тачака у комплексној равни за које је:

а) $\operatorname{Im}\left\{\frac{z-6i}{z+8}\right\} = 0$ $[3x - 4y + 24 = 0]$ -једначина праве

б) $3 < |z| < 5$ $9 < x^2 + y^2 < 25$

в) $z \cdot \bar{z} + \frac{3}{2}(z + \bar{z}) - 4 = 0$ $\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4} \right]$ -кружница

$$C\left(-\frac{3}{2}, 0\right), r = \frac{5}{2}$$

г) $|z - 1 - i| < 1$ $\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 < 1 \right]$ -кружница

$$C(1,1), r = 1$$

$$z^8 - 16 = 0$$