FUNKCIJE

Istorijat

- ***POJAM FUNKCIJE***

Put od fiksnih veličina do promenljivih, kao apstrakciji višeg stepena, vezan je za period od 13 do 16 veka. Dekartova metoda koordinata omogućila je definisanje funkcionalne zavisnosti i dalji razvoj matematike. Tek u 19 veku nemački matematičar L. Dirichlet (1805.-1859.) napravio je odlučijući korak u uopštavanju pojma funkcije, prekinuvši tradicionalna shvatanja kojim se pojam funkcije izjednačavao sa pojmom analitičkog izraza i daje definiciju koju mi danas modifikovano koristimo. Moderna teorija skupova otišla je još dalje i oslobodila pojam funkcije ograničenja vezanih za domen i kodomen.

B

Rene Descartes (1596-1650)

Dekart je veliki francuski matematičar i filozof. Tvorac je koorinatnog sistema kojim je uspostavio vezu između algebre i geometrije. Na taj način stvorio je novu naučnu disciplinu, analitičku geometriju, koja je omogućila dalji napredak matematike.

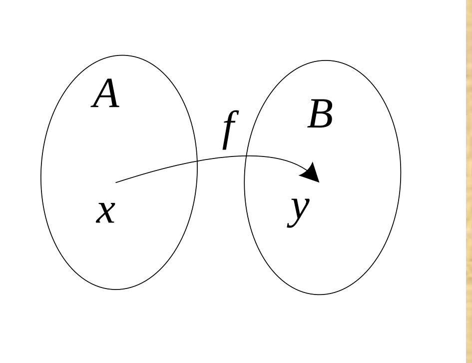
U filozofiji zastupao je metodu kritičke sumnje i poznata je njegova misao «mislim dakle postojim».

B

FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE

Neka su *A* i *B* proizvoljni skupovi.

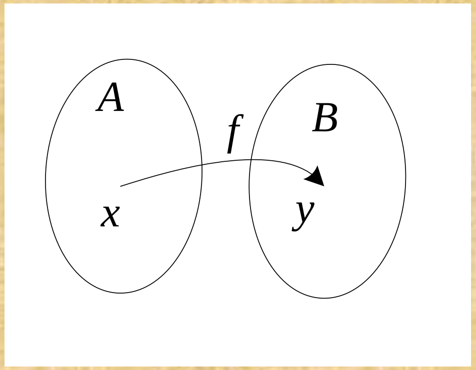
Preslikavanje ili ***funkcija*** predstavlja zakon korespondencije pomoću koga se proizvoljnom elementu $x \in A$ dode



element $y \in B$ takav da je

$$y = f\left(x\right) \qquad f : A \to B$$

- Element *x* naziva se ***original***, a *y* njegova ***slika***
- Skup *A* naziva se ***oblast definisanosti*** ili ***domen*** funkcije i obeležava se sa D_x
- Skup *B* naziva se ***oblast vrednosti*** ili ***kodomen*** funkcije i obeležava se sa D_y



- Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je **jednoznačna** ako se bilo kom elementu *x* iz skupa *A* korespondira najviše jedan element *y* iz skupa *B*.

- Pod **realnom funkcijom** podrazumeva se svako preslikavanje $f : R \to R$ tj. kod koga su domen i kodomen skupovi realnih brojeva.

NAČINI ZADAVANJA FUNKCIJA

1. Zadavanje funkcije analitičkim izrazom.
Analitički izraz može biti eksplicitnog oblika $y = f(x)$ ili implicitnog oblika $F(x, y) = 0$
2. Tablični način zadavanja funkcije.
3. Zadavanje funkcije njenim grafikom.
4. Zadavanje funkcije pomoću parametara.

Napomena: Predstavljanje funkcije grafikom ili tabelom se uglavnom koristi u primenama matematike.

Primer 1

Odrediti domen funkcije $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$

Rešenje:

Znajući da imenilac razlomka mora da bude različit od nule, tj. $x-3\neq 0$

dobijamo $x\neq 3$. Prema tome domen funkcije je skup $x\in(-\infty,3)\cup(3,\infty)$ ili

Korisrti se i zapis $D_x=R\setminus\{3\}$

Primer 2

Odrediti domen funkcije $y = \sqrt{4 - x^2}$

Rešenje:

Znajući da podkorena veličina mora da bude veća ili jednaka od nule određujemo domen funkcije

$$4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2 - x)(2 + x) \geq 0 \Leftrightarrow D_x : x \in [-2, 2]$$

Primer 3

Odrediti domen funkcije $y = x^2 + 2x$

Primer 4

Odrediti domen funkcije $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Primer 3

Odrediti domen funkcije $y = x^2 + 2x$

Rešenje:

$$D_x = R$$

Primer 4

Odrediti domen funkcije $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Rešenje:

$$D_x = R$$

Primer 5

Odrediti kodomen funkcija:

$$y = 2^x$$

$$y = x - 2$$

$$y = x^2 + 1$$

Primer 5

Odrediti kodomen funkcija:

$$y = 2^x \qquad D_y : y \in [1, +\infty)$$

$$y = x - 2 \qquad D_y = R$$

$$y = x^2 + 1 \qquad D_y : y \in [0, \infty)$$

OSOBINE FUNKCIJA

- Funkcija $f(x)$ je **ograničena** ako važi:

$$\left(\exists m, M \in R\right)\left(\forall x \in D_x, m \leq f(x) \leq M\right)$$

Grafik ograničene funkcije nalazi između dve prave

$$y = m \quad \text{i} \quad y = M$$

Ako brojevi *M* i *m* ne postoje, za funkciju $f(x)$ kažemo da je neograničena.

Primer 6

Ispitati ograničenost funkcije $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

Rešenje:

Kako je za sve realne brojeve ispunjeno da je $0 < \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$ zaključujemo da je

funkcija je ograničena na intervalu $(0,1]$

OSOBINE FUNKCIJA

- **Nula** funkcije je onaj broj $\alpha \in D_x$ za koji je $f(\alpha) = 0$
- Nule funkcije su tačke preseka funkcije sa Ox osom

Primer 7

Odrediti nulu funkcije $y = x^2 - 5x + 6$

Rešenje:

$$y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2$$

OSOBINE FUNKCIJA

Primer 8

Odrediti nulu funkcije

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$$

OSOBINE FUNKCIJA

Primer 8

Odrediti nulu funkcije $$y=\frac{x^2-4}{x^3+8}$$

Rešenje:

$$y=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$$

Kako funkcija nije definisana za $x=2$ nula funkcije je samo $x=-2$

OSOBINE FUNKCIJA

- Funkcija je $f(x)$ **parna** ako je $f(-x) = f(x)$
- Grafik parne funkcije je simetričan u odnosu na osu *y*
- Funkcija $f(x)$ je **neparna** ako je $f(-x) = -f(x)$
- Grafik neparne funkcije je simetričan u odnosu na koordinatni početak

OSOBINE FUNKCIJA

Primer 9

Ispitati parnost i neparnost funkcija:

$$a)\ f(x)=x^3-2x$$

$$b)\ f(x)=x^2-2$$

$$c)\ f(x)=x^2-2x^3+1$$

Rešenje:

$$a)\ f(-x)=(-x)^3-2(-x)=-x^3+2x=-\left(x^3-2x\right)=-f(x)$$ funkcija je neparna.

$$b)\ f(-x)=(-x)^2-2=x^2-2=f(x)$$ funkcija je parna

$$c)\ f(-x)=(-x)^2-2(-x)^3+1=x^2+2x^3+1$$ funkcija nije ni parna ni neparna.

OSOBINE FUNKCIJA

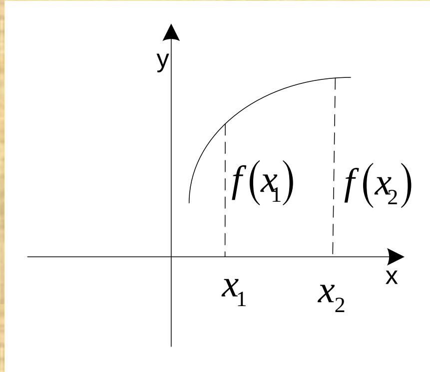
- Funkcija $f(x)$ je **rastuća** ako $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,

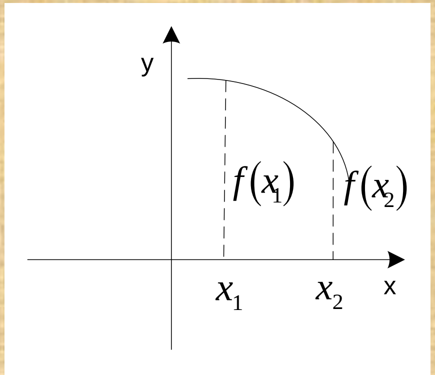
  a **strogo rastuća** ako $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- Funkcija $f(x)$ je **opadajuća** ako $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,

  a **strogo opadajuća** ako $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- Rastuće i opadajuće funkcije jednim imenom zovemo **monotone funkcije**.





Primer 11

Ispitati monotonost sledećih funkcija

$$a)\ y=-x^3$$

$$b)\ y=e^x$$

Rešenje

a) Funkcija je strogo rastuća jer za sve realne brojeve ispunjeno da

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1^{\ 3} > -x_2^{\ 3}$$

b) Funkcija je strogo opadajuća jer za sve realne brojeve ispunjeno da

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$$

PREGLED ELEMENTARNIH FUNKCIJA

Stepena funkcija $y = x^n$

Eksponencijalna funkcija $y = a^x\ , a > 0\ , a \neq 1, x \in R$

Logaritamska funkcija $y = \log_a x\ , a > 0\ , a \neq 1, x \in (0, +\infty)$

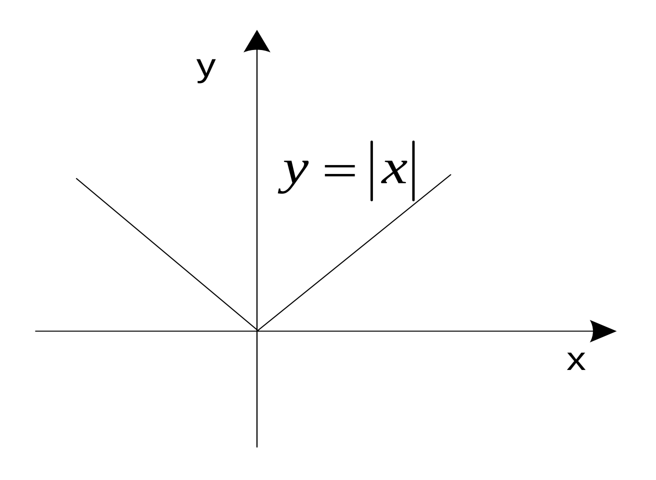
Trigonometrijske funkcije: $y = \sin x\ , y = \cos x$

Elementarnim funkcijama nazivaju se funkcije koje se mogu zadati pomoću osnovnih elementarnih funkcija i konstanti pomoću konačno mnogo operacija sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i kompozicije funkcija.

PREGLED ELEMENTARNIH FUNKCIJA

Apsolutna vrednost

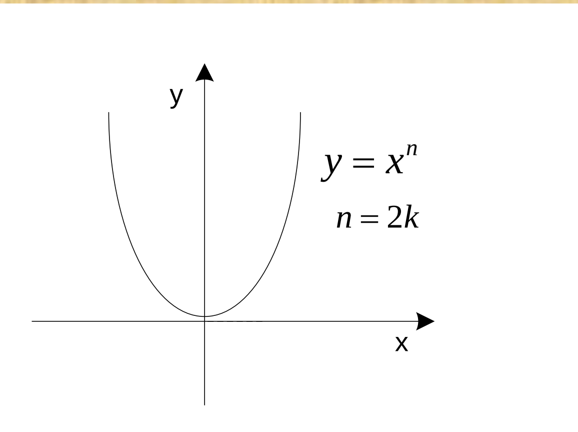
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

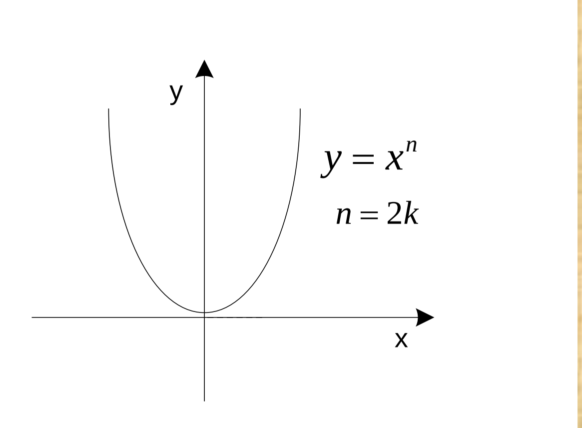


PREGLED ELEMENTARNIH FUNKCIJA

Stepena funkcija

$$y = x^n \ , n \in N$$





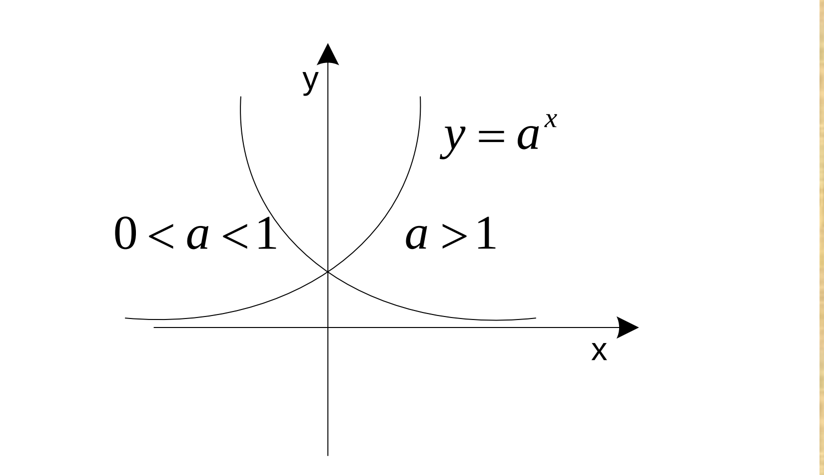
PREGLED ELEMENTARNIH FUNKCIJA

Eksponencijalna funkcija $y = a^x \, , a > 0 \, , a \neq 1$

Domen funkcije je skup svih realnih brojeva , a kodomen skup pozitivnih reanih

Funkcija nema nula jer je $a^x > 0$ i na celom domenu je pozitivna.

Ukoliko je *0<a<1* funkcija stalno opada, a kada je *a>1* funkcija stalno raste i nema ekstrema.



R

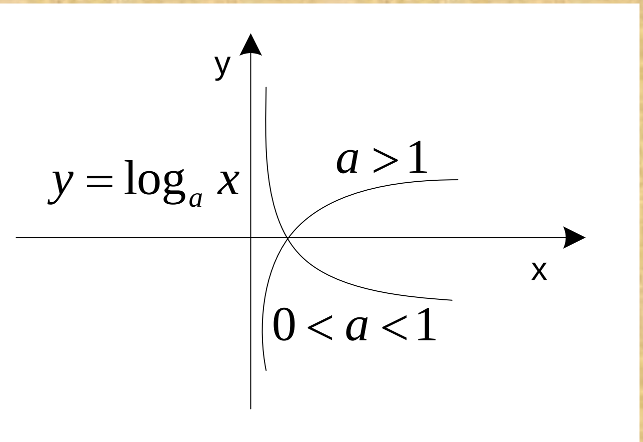
PREGLED ELEMENTARNIH FUNKCIJA

Logaritamska funkcija $y = \log_a x\,,\, a > 0\,,\, a \neq 1$

Domen funkcije je skup svih pozitivnih realnih brojeva, a kodomen je *R*

Funkcija ima nulu za *x=1*.

Ukoliko je *0<a<1* funkcija stalno opada, a kada je *a>1* funkcija stalno raste i nema ekstrema.



Primer 12

Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:

$$a)\ y=\frac{2x}{x^2-1}\qquad b)\ y=\frac{1-2x}{(x-1)^2}\qquad c)\ y=\frac{2x}{x^2+1}$$

,

,

Rešenje:

.

$$a)\ x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1,\ D_x: x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

$$b)\ (x-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1,\quad D_x=R\setminus\{1\}$$

$$c)\ x^2+1>0,\quad D_x=R$$

Primer 13

Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:

$$a)\ y=\sqrt{9-x^2} \qquad b)\ y=\sqrt{4x-x^2}, \qquad c)\ y=\frac{8x-16-x^2}{\sqrt{2-x}}$$

,

,

Rešenje:

.

$$a)\ 9-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x) \geq 0\ ,\ D_x : x \in [-3,3]$$

$$b)\ 4x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(4-x) \geq 0 \Leftrightarrow D_x : x \in [0,4]$$

$$c)\ 2-x>0 \Leftrightarrow x<2\ ,\ D_x : x \in (-\infty, 2)$$

Primer 14

Odrediti domen, nule i znak funkcije $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Rešenje:

Domen: Kako je izraz $x^2+1>0$ za svako x, $D_x = R$

Nule funkcije: $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Znak funkcije : $x \in (-\infty, 0)$ $y < 0$

$x \in (0, \infty)$ $y > 0$

Primer 15

Odrediti domen, nule i znak funkcije $y=\dfrac{e^x}{x-1}$

Rešenje:

Domen : $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1, \quad D_x : x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Nule funkcije:

Nule funkcije: $e^x>0$ i funkcija nema nula.

Znak funkcije : $x\in(-\infty,1), \quad y<0$

$x\in(1,\infty), \quad y>0$